多变量样条有限元法

沈鹏程　著



科学出版社





国家自然科学基金委员会资助出版

多变量样条有限元法

沈鹏程 著



科学出版社

1997



内 容 简 介

本书系统阐述了基于广义变分原理、状态空间理论和样条函数理论的多变量样条有限元法及其应用．全书共分五章，内容包括：一、二、三类变量的变分原理，广义变分法及其简单应用，样条插值函数，二、三类变量的样条有限元法．书中还介绍了基于状态空间理论的多变量数值方法，其中包括直角坐标系平面条形体、极坐标系平面体、矩形板弯曲和圆柱形壳体弯曲等多变量场问题的状态空间理论与算法．书中给出了梁、板、壳的弯曲、振动与稳定问题的大量数值结果．此外，还安排了结构动力响应分析的状态空间法．

本书是国家自然科学基金资助项目“多变量样条有限元法”的主要研究成果．

本书可作为高等院校土建、道桥、机械、造船、航空及工程力学等专业的研究生教学参考书，亦可供工程技术人员、科学研究工作者和教师作自学参考用书．

图书在版编目(CIP)数据

多变量样条有限元法/沈鹏程著．-北京：科学出版社，1997
ISBN 7-03-005726-0

Ⅰ．多…　Ⅱ．沈…　Ⅲ．多变量-样条函数-有限元法　Ⅳ．O241.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 22602 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1997 年 6 月第　一　版　开本：850×1168 1/32
1997 年 6 月第一次印刷　印张：7 3/4
印数：1－1 600　字数：197 000

定价：16.00 元

前　言

本世纪60年代以来，随着计算机科学的发展，出现了一类与计算机相结合的数值方法，如有限元法、边界元法及样条有限元法等，使结构分析与计算发生了突破性进展．但是，上述各种方法均属于一类单变量数值方法，当求出了单变量的近似值后，还必需通过其函数的若干阶导数及其关系才能求得其它变量的近似值．

近几年来，我们应用乘积型二元三次B样条插值函数来构造多变量场函数，基于二、三类变量广义变分原理与现代控制论中的状态空间理论建立了多变量样条有限元法模型．在计算各类场变量时，无需进行求导，甚至也不用物理关系，能直接获得其近似解答，从而扩大了弹性结构理论的解题范围．由于工程物理问题其数学模型大多可归结为偏微分方程的边初值问题，若能找到相应的广义变分原理，就可以应用多变量有限元法求解多类场变量问题．因此，基于广义变分原理与状态空间理论的多变量数值方法的研究是一项很有学术意义和应用价值的课题，到目前为止，国内外尚未出版过这方面的专门著作，我们在完成国家自然科学基金资助下的多变量样条有限元法研究课题的基础上，并结合有关文献资料，撰写成本书．本书对二、三类变量广义变分原理，广义变分法，状态空间法，样条插值函数，多变量样条有限元法模型以及梁、板、壳的弯曲、振动与稳定分析等问题作了系统论述，书中还列出了较为详尽的数值结果．

本书的出版得到国家自然科学基金的资助，在此向国家自然科学基金委员会表示诚挚的谢意．由于作者水平有限，书中难免有不妥之处，望读者批评指正．

沈鹏程

于合肥工业大学

1995.8

绪　论

本世纪 60 年代，随着计算机科学技术的发展，在结构分析矩阵方法的基础上，诞生了有限元法．50 年代中期，阿吉里斯(Argyris J. H.)[1]研究复杂结构，从而进一步发展了结构分析的矩阵方法，它特别适合在计算机上实施计算．1956 年特纳(Turner M. J.)与克拉夫(Clough R. W.)[32]等将刚架位移法的思想推广应用于弹性平面体问题上，建立了单元与结构刚度方程．1960 年，克拉夫[33]首次引入了"有限元法"(Finite Element Method)这一名词，并发表了平面应力问题的有限元法论文，这标志着有限元法正式诞生．70 年代前后，基于各种变分原理的有限元法得到了迅速发展，米洛希(Melosh R. J.)[34]等应用势能原理导出了有限元位移模型，卞学镄(Pian T. H. H.)[35]应用余能原理建立了杂交应力有限元法模型，赫尔曼(Herrmann L. R.)[36]应用汉林格-赖斯纳原理(Hellinger-Reissner)建立了混合有限元模型，辛克维茨(Zienkiewicz O. C.)[2]和张佑启(Cheung Y. K.)等[4]作了进一步发展与应用．这样，有限元法获得了牢固的理论基础和广阔的发展与应用前景．

我国学者在有限元法模型的构造中，亦作出了许多贡献(见文献[37,39,40,51,75,82]，[7—16]和[19—22])．有限元法的发展促进结构力学现代化，出现了计算结构力学．钱令希倡导的计算结构力学及其应用在国内得到了迅速发展[38]．现在，人们已不限于对复杂结构分析与计算方面(应用计算机就能快速高效地获得计算结果)，而进入到计算机辅助结构设计、结构优化设计[5]与结构控制[6,7]等科学技术领域．从而推动了结构力学、固体力学等基本理论的发展，如函数插值理论、变分原理与状态空间理论等．1974 年恩脱斯(Antes H.)[49]提出了应用截断式三次 B 样条插值函数来构造位移场函数，求解了薄板弯曲问题，但在一段时间内未得到进一步发展．1979 年，石钟慈[51]提出了

用分段式三次B样条插值函数来构造矩形板的弯曲位移场函数，应用最小势能原理导出了样条有限元法计算模型，解答了薄板弯曲问题．随后，在国内，对该法展开了广泛的应用研究，在板壳结构的静力、振动、稳定与动力问题上取得了一系列成果[51-79]．尽管与计算机相结合的各种数值方法使结构分析与计算发生了巨大变化，取得了显著进步，但是，上述各种方法大多属于一类单变量数值方法．当求出了单变量近似值之后，还必需通过其函数的若干阶导数及其关系才能求得全部场变量的近似值．

近几年来，我们应用乘积型二元三次B样条插值函数来构造多变量场函数，基于二、三类变量广义变分原理与现代控制论中的状态空间理论建立多变量样条有限元法计算模型．在计算各类变量时，无需进行求导，甚至也不用物理关系，能直接求得各类场变量的近似解答．对一类不满足物理关系的问题，也能获得近似解，从而扩大了弹性理论的解题范围．由于工程物理问题其数学模型大多可归结为偏微分方程的边初值问题，若能找到相应的广义变分原理，就可以应用多变量数值方法求解多类场变量问题，这有重要的理论意义与广阔的应用前景．

本书的第一章介绍了一、二、三类变量的变分原理及其简单应用，样条函数的构造，多点样条函数的线性组合及其积分，边界条件的处理等，为后续章节提供应用．

第二章安排了基于二类变量广义变分原理的多变量样条有限元法，应用样条函数来构造二类场变量（应力与位移）函数，应用二类变量广义变分原理（也称混合能量原理）导出多变量样条有限元法方程组，对工程中一类量大面广的厚、薄梁与厚、薄板等弯曲、振动与稳定问题，建立了计算格式，给出了一系列数值结果．由于样条函数具有解析与数值的双重特性，连续性强，待定未知量少，逼近精度高，也由于独立设置二类变量场函数，因此，计算精度对二类变量均比较高，尤其是在结构承受集中荷载的情况下，所获得的二类场变量值就是精确解．

第三章讲述了采用乘积型二元三次B样条函数来构造三类变量（应力、位移与应变）场函数，基于三类变量广义变分原理导出多变量样条有限元法方程组，给出了板结构的弯曲、振动与稳定问题的一系列数

值解答．由于独立设置三类变量场函数，因此，对应力、位移与应变均有较高的计算精度．

第四章论述了基于状态空间理论的多变量数值方法．根据弹性理论与结构力学控制方程及其等价的混合变分原理，进行数学变换，建立系统的状态方程．也可以通过古典力学中的哈密顿(Hamilton)原理，导出状态方程，研究其解法．应用三角函数、代数插值函数与三次B样条插值函数，分别来建立解析方法、半解析与半数值方法的计算格式．根据状态空间理论中的指数函数矩阵求解方法，给出了弹性结构状态空间表达式的若干求解方案．除了对一系列结构静力问题给出了解答外，还简要地介绍了结构动力分析的状态空间方法．

第五章介绍了多变量样条有限元法分析扁壳问题．应用乘积型二元三次B样条插值函数，来构造二、三类场变量函数，根据扁壳的二、三类变量广义变分原理，建立了多变量样条有限元法计算模型，其中包括样条混合有限元法与三类变量样条有限元法的计算格式．由于位移、应力与应变一起求解，故计算精度均比较高．本章给出了一系列壳体结构的弯曲与振动问题的数值解答．

本书所介绍的多变量数值方法和给出的大量计算成果，对工程物理领域中的多类场变量问题的求解，有启发、借鉴与指导意义．

目　　录

第一章　广义变分法与样条函数

本章介绍二、三类变量广义变分原理和样条插值函数，为以后各章建立多变量样条有限元法提供理论基础. 首先，详细论证了二、三类变量广义变分原理，提出了广义变分法及其在简单问题中的具体应用. 其次，介绍了三、五次 B 样条函数的构造及其函数的导数和积分计算的一些基本知识.

1.1　弹性力学的基本方程

在弹性力学（弹性理论）中，对一般线弹性体，从静力学、几何学和物理学三方面的规律来考虑，可获得 15 个基本方程，其中包括 3 个平衡方程，6 个物理方程和 6 个几何方程. 在位移边界问题中，位移分量在边界上还应满足位移边界条件，即 $u=\bar{u}, v=\bar{v}, w=\bar{w}$. 在应力边界问题中，应力分量在边界上还应满足应力条件，即在边界上应满足应力与边界面力保持力的平衡. 为了简洁地表达这些方程，现将弹性力学中 15 个基本方程表达成矩阵形式.

平衡微分方程

$$\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{\sigma}+\underset{\sim}{f}=\underset{\sim}{0} \qquad \text{在域内} \tag{1.1.1}$$

$$\underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{\sigma}=\underset{\sim}{\bar{p}} \qquad \text{在域的边界 } S_\sigma \text{ 上} \tag{1.1.2}$$

在上两式中，矩阵微分算子和方向余弦矩阵分别为

$$\underset{\sim}{L}=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1.3}$$

$$\underset{\sim}{E}=\begin{bmatrix} l & 0 & 0 & 0 & n & m \\ 0 & m & 0 & n & 0 & l \\ 0 & 0 & n & m & l & 0 \end{bmatrix} \tag{1.1.4}$$

应力、体力及面力向量分别为

$$\underset{\sim}{\sigma}=[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{xy}]^T \tag{1.1.5}$$

$$\underset{\sim}{f}=[f_x \quad f_y \quad f_z]^T \tag{1.1.6}$$

$$\underset{\sim}{\bar{p}}=[\bar{p}_x \quad \bar{p}_y \quad \bar{p}_z]^T \tag{1.1.7}$$

方向余弦为

$$l=\cos(x,N), \quad m=\cos(y,N), \quad n=\cos(z,N) \tag{1.1.8}$$

几何方程

$$\underset{\sim}{\varepsilon}=\underset{\sim}{L}^T\underset{\sim}{u} \tag{1.1.9}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}=[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{zy} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{xy}]^T \tag{1.1.10}$$

$$\underset{\sim}{u}=[u \quad v \quad w]^T \tag{1.1.11}$$

物理方程

$$\underset{\sim}{\sigma}=\underset{\sim}{D_e}\underset{\sim}{\varepsilon} \tag{1.1.12}$$

式中，$\underset{\sim}{D_e}$ 为弹性矩阵，其表达式为

$$\underset{\sim}{D_e}=D_e\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & \underset{\sim}{0} & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & \\ & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & \\ & \underset{\sim}{0} & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & \\ & & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \tag{1.1.13}$$

其中

$$D_e=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

1.2 最小总势能原理

上节把弹性力学基本方程表达成矩阵形式，简洁而紧凑. 除了简单问题外，一般很难应用解析方法求解上述偏微分方程组的边值问题. 为了求得问题的近似解，可将偏微分方程的边值问题转换成一个变分问题，从而可扩大弹性力学的解题范围.

设有一空间弹性体，处于平衡状态下，其上有体力作用，假设该弹性体有两类边界条件，一部分为固定边界 S_u，其上有未知面力 $\underset{\sim}{p}$ 和已知位移 $\underset{\sim}{\bar{u}}$；另一部分为自由边界 S_σ，其上有已知面力 $\underset{\sim}{\bar{p}}$ 和未知位移 $\underset{\sim}{u}$. 带上一杠的字母表示给定的位移和面力，如图 1.1 所示.

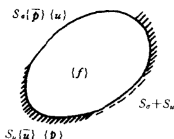


图 1.1

整个系统的势能包含两部分，一部分是弹性体应变能 U，另一部分是外力势能. 应变能

$$U=\frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{\sigma}^T\underset{\sim}{\varepsilon}\,d\Omega=\frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{\varepsilon}^T\underset{\sim}{D_e}\underset{\sim}{\varepsilon}\,d\Omega$$

外力势能

$$V=-\int_\Omega \underset{\sim}{f}^T\underset{\sim}{u}\,d\Omega-\int_{S\sigma}\underset{\sim}{\bar{p}}^T\underset{\sim}{u}\,ds$$

式中，Ω 与 S 分别代表弹性体所占的空间与表面. 整个弹性体的总势能为

$$\Pi_p = U + V = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{D}_e \underset{\sim}{\varepsilon}\, d\Omega - \int_{\Omega} \underset{\sim}{f}^T \underset{\sim}{u}\, d\Omega - \int_{S_\sigma} \underset{\sim}{\bar{p}}^T \underset{\sim}{u}\, ds \qquad (1.2.1)$$

现对式(1.2.1)进行关于位移的变分，并令其变分为零，就有

$$\delta\Pi_p(\underset{\sim}{u}) = \int_{\Omega} \underset{\sim}{\sigma}^T \delta \underset{\sim}{\varepsilon}\, d\Omega - \int_{\Omega} \underset{\sim}{f}^T \delta \underset{\sim}{u}\, d\Omega - \int_{S_\sigma} \underset{\sim}{\bar{p}}^T \delta \underset{\sim}{u}\, ds = \underset{\sim}{0} \qquad (1.2.2)$$

对上式的积分项 $\int_{\Omega} \underset{\sim}{\sigma}^T \delta \underset{\sim}{\varepsilon} d\Omega$ 进行分部积分，有

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{\varepsilon}\, d\Omega &= \int_{\Omega} \underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{L}^T \delta\, \underset{\sim}{u}\, d\Omega \\ &= \int_{S_\sigma + S_u} \delta \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{E}\, \underset{\sim}{\sigma}\, ds - \int_{\Omega} \delta \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{L}\, \underset{\sim}{\sigma}\, d\Omega \end{aligned} \qquad (1.2.3)$$

现将公式(1.2.3)代入式(1.2.2)，经过整理后，有

$$-\int_{\Omega} (\underset{\sim}{L}\, \underset{\sim}{\sigma} + \underset{\sim}{f})^T \delta \underset{\sim}{u}\, d\Omega + \int_{S_\sigma} (\underset{\sim}{E}\, \underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{\bar{p}})^T \delta \underset{\sim}{u}\, ds = \underset{\sim}{0}$$

考虑到在域内位移变分是不为零的任意微小值，因而可以由上式得到弹性体的平衡微分方程与力的边界条件，即

$$\underset{\sim}{L}\, \underset{\sim}{\sigma} + \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{0} \qquad \text{在 } \Omega \text{ 域内} \qquad (1.2.4)$$

$$\underset{\sim}{E}\, \underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\bar{p}} \qquad \text{在 } \Omega \text{ 域的边界 } S_\sigma \text{ 上} \qquad (1.2.5)$$

这表明弹性体的平衡微分方程的边值问题等价于其总势能变分为零的问题. 由此可得到一个结论：连续变形体的一切可能的位移状态中，那些满足域内与边界平衡条件的位移状态，能使其总势能有驻值，即 $\delta\Pi_p = 0$ 时的 Π_p 值，此值既非极大值，也非极小值，而称为驻值. 当线弹性连续变形体处于稳定的平衡状态时，总势能有极小值. 论证如下.

设有一线弹性连续变形体，在给定荷载作用下，处于稳定平衡状态下，若有一真解或正确解 $\underset{\sim}{u}$，它满足弹性理论的全部微分方程与边界条

件，并设想若有另一组解答为 $\underset{\sim}{u}'$，根据泰勒级数，有

$$\Pi_p(\underset{\sim}{u}') = \Pi_p(\underset{\sim}{u} + \delta\underset{\sim}{u}) = \Pi_p(\underset{\sim}{u}) + \delta\Pi_p + \delta^2\Pi_p \qquad (1.2.6)$$

在式(1.2.6)中，$\delta\Pi_p$ 为一阶变分，$\delta^2\Pi_p$ 为二阶变分，三阶以上变分均略去. 若线弹性连续变形体处于稳定平衡状态，则有 $\delta\Pi_p=0$，而二阶变分 $\delta^2\Pi_p$ 为应变能增量，为正定二次型，故必有 $\delta^2\Pi_p>0$，于是由式(1.2.6)可以看出，

$$\Pi_p(\underset{\sim}{u}') > \Pi_p(\underset{\sim}{u}) \qquad (1.2.7)$$

因此，若 $\underset{\sim}{u}$ 为问题的真解或正确解，则总势能泛函数必定为极小值.

线弹性连续变形体的最小总势能原理叙述如下：线弹性连续变形体在真实位移状态下的总势能恒小于其它可能位移状态下的总势能. 或者线弹性连续变形体处于稳定平衡的必要与充分条件是总势能有最小值.

1.3 最小总余能原理

弹性体的总余能定义为余应变能与已知位移边界上的外力余功之和，即有

$$\Pi_c = U_c + V_c = \frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{\sigma}\, d\Omega - \int_{S_u} \underset{\sim}{p}^T \bar{\underset{\sim}{u}}\, ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{D}_e^{-1} \underset{\sim}{\sigma}\, d\Omega - \int_{S_u} \underset{\sim}{p}^T \bar{\underset{\sim}{u}}\, ds \qquad (1.3.1)$$

对式(1.3.1)关于应力 $\underset{\sim}{\sigma}$ 进行变分，并令其为零，即有

$$\delta\Pi_c = \int_{S_u} \delta\underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{D}_e^{-1} \underset{\sim}{\sigma}\, d\Omega - \int_{S_u} \bar{\underset{\sim}{u}}^T \delta\underset{\sim}{p}\, ds = \underset{\sim}{0} \qquad (1.3.2)$$

我们知道，任意一组域内应力变分应该满足域内齐次平衡方程，任意一组边界面力变分应满足边界齐次平衡方程，即有

$$\underset{\sim}{L}\,\delta\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{0}, \qquad \underset{\sim}{E}\,\delta\underset{\sim}{\sigma} = \delta\underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{0} \qquad (1.3.3)$$

现将真实位移 $\underset{\sim}{u}$ 乘以式(1.3.3)左边，并对整体进行积分，应用分部积

分就有

$$\int_{\Omega} \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{L} \, \delta \underset{\sim}{\sigma} \, d\Omega = \int_{S_\sigma + S_u} (\underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{E} \, \delta \underset{\sim}{\sigma}) ds - \int_{\Omega} \delta \underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{L}^T \underset{\sim}{u} \, d\Omega = \underset{\sim}{0} \tag{1.3.4}$$

现比较式(1.3.2)和式(1.3.4),并考虑到式(1.3.3),就有

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{L}^T \underset{\sim}{u} \qquad \text{在 } \Omega \text{ 域内} \tag{1.3.5}$$

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{\bar{u}} \qquad \text{在 } \Omega \text{ 域的 } S_u \text{ 边界上} \tag{1.3.6}$$

由总余能 Π_c 的变分为零,即 $\delta\Pi_c = \underset{\sim}{0}$,就得到弹性体的几何方程或变形协调性条件即域内应变与位移间的微分关系和边界上的位移条件.弹性体的几何协调条件能变换成总余能泛函的一个变分问题.

结论:在连续变形体内部满足平衡条件,并在边界上满足应力边界条件的一切应力状态中,那些满足变形协调性条件的应力状态能使总余能泛函有驻值,或者真实应力场使弹性体的总余能为驻值.可进一步证明此时的 Π_c 为最小值,这就得到最小总余能原理.

设有一弹性变形体在给定荷载作用下处于稳定平衡状态下,若此问题有真解或正确解为 $\underset{\sim}{\sigma}$,设想另一组解答为 $\underset{\sim}{\sigma}' = \underset{\sim}{\sigma} + \delta\underset{\sim}{\sigma}$,根据泰勒级数有 $\Pi_c(\underset{\sim}{\sigma}') = \Pi_c(\underset{\sim}{\sigma} + \delta\underset{\sim}{\sigma}) = \Pi_c(\underset{\sim}{\sigma}) + \delta\Pi_c + \delta^2\Pi_c$,式中,$\Pi_c(\underset{\sim}{\sigma})$ 是真解之总余能,$\delta\Pi_c$,$\delta^2\Pi_c$ 分别为总余能的一阶、二阶变分,对于三阶以上总余能变分均忽略不计.若连续变形体处于变形协调状态下,则总余能一阶变分为零,即 $\delta\Pi_c = \underset{\sim}{0}$,而其二阶变分为 $\delta^2\Pi_c$ 为余应变能增量,是正定二次型函数,总有 $\delta^2\Pi_c > 0$.这样由上式可知:$\Pi_c(\underset{\sim}{\sigma}') > \Pi_c(\underset{\sim}{\sigma})$,于是连续变形体的最小总余能原理可叙述如下:连续变形体真实应力状态下所具有总余能恒小于其它可能应力状态下的总余能,或者连续变形体处于变形协调性状态的必要与充分条件是总余能为最小值.

上述二种变分原理,对精确解来讲,其体系的总势能与总余能之间存在有如下关系,即

$$\Pi_p(\underset{\sim}{u}) + \Pi_c(\underset{\sim}{\sigma}) = 0$$

其次,还有关系式

$$- \Pi_p(\underset{\sim}{u}') \leqslant - \Pi_p(\underset{\sim}{u}) = \Pi_c(\underset{\sim}{\sigma}) \leqslant \Pi_c(\underset{\sim}{\sigma}')$$

式中的等号只有在可能位移或可能应力就是真实位移或真实应力状态下才成立,不等号表明真实位移场或真实应力场使总势能或总余能取最小值.

在弹性力学问题中,通常有二类解题方法,一类称位移法,以位移作为基本未知量,求解位移函数表示的平衡微分方程,并使所求的位移分量在 S_u 上应满足位移边界条件,一般情况下,只有少数问题可用解析方法求得其精确解.在结构分析与力学计算问题中,应用最小总势能原理来求解近似解答是十分有效的,它提供了在结构的一切可能变形状态中寻求接近真实变形状态的位移解答,例如在梁、板与壳结构问题中,先假设具有待定参数的协调性位移函数,即梁板壳的弹性挠曲线方程式而后计算其总势能泛函,其总势能泛函的积分结果为待定参数的二次型函数.由总势能极小值条件来确定这些参数值,从而可求得问题的近似解答.目前在工程界广泛应用的有限元法,就是建立在最小总势能原理的基础上的.另一类称力法,该法选择力为基本未知量,应用最小总余能原理建立一组超静定未知力的代数方程组,求解此方程组,即可求得超静定未知力.最小总余能原理是有限元力法、杂交元法的理论基础,见文献[35].

1.4 二类变量广义变分原理(混合能量原理)

上二节分别介绍了最小总势能原理与最小总余能原理.在应用最小总势能原理求解问题时,原理本身已严格体现了平衡条件,在选取位移函数上,可作一些简化假设,因而可求得问题的近似解;应用最小总余能原理求解问题时,原理本身已严格体现了变形连续性条件,在选取应力函数时,可作一些简化假设.这二条原理在求解弹性力学问题近似解答时,能扩大其解题范围,其次在建立有限元位移与应力模型时,它们又是其理论基础[34,35].这二条原理又称为一类变量变分原理.

下面,我们将介绍二类变量变分原理.上述最小总势原理与最小总余能原理是分别以位移与应力作为自变函数的泛函.它们都是有约束

条件的一类变量变分原理，对最小总势能原理，其约束条件为域内几何方程与位移边界条件；对最小总余能原理，其约束条件为域内的平衡方程与力的边界条件. 上述一类变量变分原理也称为泛函的条件极值原理[22]. 下面要讨论的广义变分原理，就是把一类变量变分原理的条件极值转化为无条件驻值. 一般有二类变量广义变分原理和三类变量广义变分原理.

二类变量广义变分原理最早由哈林格(Hellinger)于 1914 年提出，后来由赖斯纳(Reissner)于 1950 年加以完善的，因此，通常称为哈林格-赖斯纳变分原理，亦称混合变分原理. 下面，我们通过一类变量变分原理和拉格朗日乘子法推导出二类变量广义变分原理.

根据上节式(1.3.2)最小总余能原理改写为

$$\delta \Pi_c = \delta \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{D}_e^{-1} \underset{\sim}{\sigma}\, d\Omega - \int_{s_u} (\underset{\sim}{E}\, \underset{\sim}{\sigma})^T \bar{\underset{\sim}{u}}\, ds \right\} = \underset{\sim}{0} \tag{a}$$

其中，自变函数 $\underset{\sim}{\sigma}$ 要求满足域内平衡条件和力的边界条件，因此，这是一个条件极值原理问题. 如果引入两个拉格朗日(Lagrange)乘子 $\underset{\sim}{\lambda}_1$，$\underset{\sim}{\lambda}_2$，把平衡方程和力的边界条件加入到变分式中，并将乘子参与变分，则可将式(a)转化为无条件驻值问题，此时，新泛函为

$$\begin{aligned} \Pi_{c2}^* = & \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{D}_e^{-1} \underset{\sim}{\sigma}\, d\Omega - \int_{s_u} (\underset{\sim}{E}\, \underset{\sim}{\sigma})^T \bar{\underset{\sim}{u}}\, ds \\ & + \int_{\Omega} (\underset{\sim}{L}\, \underset{\sim}{\sigma} + \underset{\sim}{f})^T \underset{\sim}{\lambda}_1 d\Omega - \int_{S_\sigma} (\underset{\sim}{E}\, \underset{\sim}{\sigma} - \bar{\underset{\sim}{p}})^T \underset{\sim}{\lambda}_2 ds \end{aligned} \tag{b}$$

现对上式关于 $\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\lambda}_1, \underset{\sim}{\lambda}_2$ 进行变分，有

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{c2}^* = & \int_{\Omega} \{ \delta \underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{\varepsilon} + (\underset{\sim}{L}\, \underset{\sim}{\sigma} + \underset{\sim}{f})^T \delta \underset{\sim}{\lambda}_1 \} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} (\underset{\sim}{L}\, \delta \underset{\sim}{\sigma})^T \underset{\sim}{\lambda}_1 d\Omega - \int_{s_u} (\underset{\sim}{E}\, \delta \underset{\sim}{\sigma})^T \bar{\underset{\sim}{u}}\, ds \\ & - \int_{s_\sigma} (\underset{\sim}{E}\, \underset{\sim}{\sigma} - \bar{\underset{\sim}{p}})^T \delta \underset{\sim}{\lambda}_2 ds - \int_{S_\sigma} (\underset{\sim}{E}\, \delta \underset{\sim}{\sigma})^T \underset{\sim}{\lambda}_2 ds = \underset{\sim}{0} \end{aligned} \tag{c}$$

将上式第二个积分项进行分部积分，得

$$\int_{\Omega}(\underset{\sim}{L}\,\delta\underset{\sim}{\sigma})^{T}\underset{\sim}{\lambda}_{1}d\Omega=\int_{S=S_u+S_\sigma}(\underset{\sim}{E}\,\delta\underset{\sim}{\sigma})^{T}\underset{\sim}{\lambda}_{1}ds-\int_{\Omega}\delta\underset{\sim}{\sigma}^{T}\underset{\sim}{L}^{T}\underset{\sim}{\lambda}_{1}d\Omega \tag{d}$$

现将式(d)代入式(c)，并进行整理，得

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{c2}^{*}=&\int_{\Omega}\delta\underset{\sim}{\sigma}^{T}(\underset{\sim}{D}_{e}^{-1}\underset{\sim}{\sigma}-\underset{\sim}{L}^{T}\underset{\sim}{\lambda}_{1})d\Omega+\int_{\Omega}(\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{\sigma}+\underset{\sim}{f})^{T}\delta\underset{\sim}{\lambda}_{1}d\Omega\\&+\int_{S_u}(\underset{\sim}{E}\,\delta\underset{\sim}{\sigma})^{T}(\underset{\sim}{\lambda}_{1}-\underset{\sim}{\bar{u}})ds-\int_{S_\sigma}(\underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{\sigma}-\underset{\sim}{\bar{p}})^{T}\delta\underset{\sim}{\lambda}_{2}ds\\&+\int_{S_\sigma}(\underset{\sim}{E}\,\delta\underset{\sim}{\sigma})^{T}(\underset{\sim}{\lambda}_{2}-\underset{\sim}{\lambda}_{1})ds=\underset{\sim}{0}\end{aligned} \tag{e}$$

考虑到变分 $\delta\underset{\sim}{\sigma},\delta\underset{\sim}{\lambda}_1,\delta\underset{\sim}{\lambda}_2$ 在域内与边界上均为不等于零的任意微小值，因此由式(e)得到

$$\begin{aligned}&\underset{\sim}{\lambda}_{1}-\underset{\sim}{\lambda}_{2}=\underset{\sim}{0} &&\text{在域}\,\Omega\,\text{的边界}\,S_\sigma\,\text{上}\\&\underset{\sim}{\lambda}_{1}=\underset{\sim}{\bar{u}} &&\text{在域}\,\Omega\,\text{的边界}\,S_u\,\text{上}\\&\underset{\sim}{D}_{e}^{-1}\underset{\sim}{\sigma}=\underset{\sim}{L}^{T}\underset{\sim}{\lambda}_{1} &&\text{在域}\,\Omega\,\text{内}\\&\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{\sigma}+\underset{\sim}{f}=\underset{\sim}{0} &&\text{在域}\,\Omega\,\text{内}\\&\underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{\sigma}=\underset{\sim}{\bar{p}} &&\text{在域}\,\Omega\,\text{的边界}\,S_\sigma\,\text{上}\end{aligned} \tag{1.4.1}$$

于是由式(1.4.1)和弹性力学基本方程组相比较可知，拉格朗日乘子的物理意义为边界与域内位移分量.将乘子用位移表示后，回代入式(b)中，即得二类变量广义余能原理，即

$$\delta\Pi_{c2}=\underset{\sim}{0} \tag{1.4.2}$$

其中

$$\begin{aligned}\Pi_{c2}(\underset{\sim}{\sigma},\underset{\sim}{u})=&\int_{\Omega}\frac{1}{2}\underset{\sim}{\sigma}^{T}\underset{\sim}{D}_{e}^{-1}\underset{\sim}{\sigma}\,d\Omega+\int_{\Omega}(\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{\sigma}+\underset{\sim}{f})^{T}\underset{\sim}{u}\,d\Omega\\&-\int_{S_u}(\underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{\sigma})^{T}\underset{\sim}{\bar{u}}\,ds-\int_{S_\sigma}(\underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{\sigma}-\underset{\sim}{\bar{p}})^{T}\underset{\sim}{u}\,ds\end{aligned} \tag{1.4.3}$$

式中，$\underset{\sim}{\sigma},\underset{\sim}{u}$为独立自变函数.

式(1.4.3)是二类变量广义余能泛函式.由二类变量广义余能泛函的驻值条件，就得到欧拉方程如式(1.4.1)，即平衡方程、几何方程(或

物理方程）和在 S_u 与 S_σ 上位移边界条件与力的边界条件.

下面，我们通过最小总势能泛函数原理与应用拉格朗日乘子法推导出二类变量广义势能原理. 弹性理论中的最小的总势能原理为 $\delta\Pi_p = \underset{\sim}{0}$. 其中，

$$\Pi_p = \int_\Omega \frac{1}{2}\underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{D_e}\underset{\sim}{\varepsilon}\, d\Omega - \int_\Omega \underset{\sim}{f}^T \underset{\sim}{u}\, d\Omega - \int_{S_\sigma} \underset{\sim}{\bar{p}}^T \underset{\sim}{u}\, ds \tag{a}$$

式中，自变函数 $\underset{\sim}{u}$ 要求满足域内几何条件和位移边界条件. 若引入两个拉格朗日乘子 $\underset{\sim}{\mu_1}, \underset{\sim}{\mu_2}$，把域内几何方程与位移边界条件加入变分式中，并将拉格朗日乘子参与变分，则问题转化为无条件驻值原理. 此时新泛函为

$$\begin{aligned}\Pi_{p2}^* = &\int_\Omega \frac{1}{2}\underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{D_e}\underset{\sim}{\varepsilon}\, d\Omega - \int_\Omega \underset{\sim}{f}^T \underset{\sim}{u}\, d\Omega - \int_{S_\sigma} \underset{\sim}{\bar{p}}^T \underset{\sim}{u}\, ds \\ &+ \int_\Omega (\underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{L}^T \underset{\sim}{u})^T \underset{\sim}{\mu_1} d\Omega + \int_{S_u} (\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{\bar{u}})^T \underset{\sim}{\mu_2} ds\end{aligned} \tag{b}$$

对式(b)关于 $\underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{\varepsilon}, \underset{\sim}{\mu_1}, \underset{\sim}{\mu_2}$ 进行变分，并令 $\delta\Pi_{p2}^* = \underset{\sim}{0}$ 即

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{p2}^* = &\int_\Omega \delta\underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{D_e}\underset{\sim}{\varepsilon}\, d\Omega - \int_\Omega \underset{\sim}{f}^T \delta\underset{\sim}{u}\, d\Omega - \int_{S_\sigma} \underset{\sim}{\bar{p}}^T \delta\underset{\sim}{u}\, ds \\ &+ \int_\Omega (\delta\underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{L}^T \delta\underset{\sim}{u})^T \underset{\sim}{\mu_1} d\Omega + \int_\Omega (\underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{L}^T \underset{\sim}{u})\delta\underset{\sim}{\mu_1} d\Omega \\ &+ \int_{S_u} (\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{\bar{u}})^T \delta\underset{\sim}{\mu_2} ds + \int_{S_u} \delta\underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{\mu_2} ds = \underset{\sim}{0}\end{aligned} \tag{c}$$

对上式第五项积分进行分部积分，得

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\underset{\sim}{L}^T \delta\underset{\sim}{u})^T \underset{\sim}{\mu_1} d\Omega &= \int_\Omega \delta\underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{L}\, \underset{\sim}{\mu_1} d\Omega \\ &= \int_{S=S_\sigma+S_u} \delta\underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{E}\, \underset{\sim}{\mu_1} ds - \int_\Omega (\underset{\sim}{L}\, \underset{\sim}{\mu_1})^T \delta\underset{\sim}{u}\, d\Omega\end{aligned} \tag{d}$$

将式(d)代入(c)简化后，得

$$\delta\Pi_{p2}^* = \int_\Omega \delta\underset{\sim}{\varepsilon}^T (\underset{\sim}{\sigma} + \underset{\sim}{\mu_1}) d\Omega + \int_\Omega (\underset{\sim}{L}\, \underset{\sim}{\mu_1} - \underset{\sim}{f})^T \delta\underset{\sim}{u}\, d\Omega$$

$$-\int_{S_\sigma}(\bar{p}+E\mu_1)^T\delta u\,ds+\int_\Omega(\varepsilon-L^T u)\delta\mu_1 d\Omega$$

$$+\int_{S_u}(u-\bar{u})^T\delta\mu_2 ds+\int_{S_u}(E\sigma+\mu_2)^T\delta u\,ds=0$$

考虑到变分 $\delta u,\delta\varepsilon,\delta\mu_1$ 和 $\delta\mu_2$ 在相应的域内与边界上均不为零的任意微小值，因此，得欧拉方程为

$$\begin{aligned}
&L\mu_1=f && \text{在域}\,\Omega\,\text{内}\\
&\varepsilon=L^T u && \text{在域}\,\Omega\,\text{内}\\
&\sigma+\mu_1=0 && \text{在域}\,\Omega\,\text{内}\\
&E\mu_1+\bar{p}=0 && \text{在域}\,\Omega\,\text{内的}\,S_\sigma\,\text{边界上}\\
&p+\mu_2=0 && \\
&u=\bar{u} && \text{在域}\,\Omega\,\text{的}\,S_u\,\text{边界上}
\end{aligned}\tag{1.4.4}$$

由式(1.4.4)中可知，乘子 μ_1，μ_2 分别为域内应力函数与边界上的应力函数，即有 $\mu_1=-\sigma$ 及 $\mu_2=-p$. 把乘子回代入 Π_{p2}^* 中并简化后即得二类变量广义势能泛函. 二类变量广义势能原理为

$$\delta\Pi_{P2}=0 \tag{1.4.5}$$

其中

$$\begin{aligned}
\Pi_{P2}(u,\sigma)=&\int_\Omega\{\sigma^T L^T u-(\frac{1}{2}\sigma^T D_e^{-1}\sigma+f^T u)\}d\Omega\\
&-\int_{S_u}p^T(u-\bar{u})ds-\int_{S_\sigma}\bar{p}^T u\,ds
\end{aligned}\tag{1.4.6}$$

在式(1.4.6)中，有应力 σ 与位移 u 二类独立自变函数. 式(1.4.6)称为二类变量广义势能泛函.

由上分析可知，弹性力学中的二类变量广义变分原理等价于其平衡方程、几何方程(或物理方程)和一切边界条件. 二类变量广义余能泛函与二类变量广义势能泛函之间存在下列关系：

$$\Pi_{c2} + \Pi_{P2} = 0 \tag{1.4.7}$$

它们的独立自变量函数 $\boldsymbol{\sigma}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 已不再受任何约束条件的限制．上述二种形式的二类变量广义变分原理都是无条件驻值原理，即 $\delta\Pi_{c2} = \boldsymbol{0}$ 和 $\delta\Pi_{P2} = \boldsymbol{0}$，其中 Π_{c2}，Π_{P2} 分别为式(1.4.3)和式(1.4.6)．

1.5　二类变量广义变分法

以上，我们分别从最小总余能原理与最小总势能原理，应用拉格朗日乘子法论证了二类变量广义势能原理．下面通过若干简单例题来说明二类变量广义变分原理的初步应用，在这里，我们称之为二变量广义变分法．二类变量广义势能泛函式为

$$\begin{aligned}\Pi_{P2} = &\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{u}\, d\Omega - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{D}_e^{-1} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{u}\right) d\Omega \\ &- \int_{S_\sigma} \bar{\boldsymbol{p}}^T \boldsymbol{u}\, ds - \int_{S_u} [\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{\sigma}]^T (\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{u}}) ds\end{aligned} \tag{1.5.1}$$

选择位移场与应力场函数分别为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}_u \boldsymbol{a}, \qquad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{N}_\sigma \boldsymbol{b} \tag{1.5.2}$$

式中的 $\boldsymbol{N}_u$，$\boldsymbol{N}_\sigma$ 为坐标的连续函数，选择这函数时，要分别满足边界上相应的位移与应力条件，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为待定常数．将式(1.5.2)代入式(1.5.1)并简化后，得离散型二类变量广义势能泛函式

$$\Pi_{P2} = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{K}_{\sigma u} \boldsymbol{a} - \frac{1}{2} \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{K}_\sigma \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{F} - \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{P} \tag{1.5.3}$$

由二类变量广义势能原理，即

$$\frac{\partial \Pi_{P2}}{\partial \boldsymbol{a}} = \boldsymbol{0}, \qquad \frac{\partial \Pi_{P2}}{\partial \boldsymbol{b}} = \boldsymbol{0}$$

得

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{K}_\sigma & \boldsymbol{K}_{\sigma u} \\ \boldsymbol{K}_{\sigma u}^T & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{F} + \boldsymbol{P} \end{Bmatrix} \tag{1.5.4}$$

式中

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{K}_\sigma &= \int_\Omega \underset{\sim}{N}_\sigma^T \underset{\sim}{D}_e^{-1} \underset{\sim}{N}_\sigma d\Omega \\
\underset{\sim}{K}_{\sigma u} &= \int_\Omega \underset{\sim}{N}_\sigma^T \underset{\sim}{L}^T \underset{\sim}{N}_u d\Omega \\
\underset{\sim}{F} &= \int_\Omega \underset{\sim}{N}_u^T \underset{\sim}{f}\, d\Omega \\
\underset{\sim}{P} &= \int_{S_\sigma} \underset{\sim}{N}_u^T \underset{\sim}{\bar{p}}\, ds
\end{aligned}
\tag{1.5.5}
$$

式(1.5.4)称二类变量广义变分法方程组.

例 1.1 悬臂梁承受均布荷载 q 如图 1.2 所示,求梁自由端处的挠度与转角.

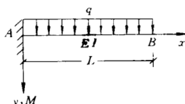


图 1.2

假设位移与应力场函数分别为

$$
w = \underset{\sim}{N}_u \underset{\sim}{a}, \quad \underset{\sim}{N}_u = [x^2, x^3], \quad \underset{\sim}{a} = [a_1, a_2]^T
$$

$$
\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{N}_\sigma \underset{\sim}{b},\ \underset{\sim}{N}_\sigma = [(x-L) \quad (x-L)^2]\frac{y}{I}, \underset{\sim}{b} = [b_1, b_2]^T
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{K}_\sigma &= \int_\Omega \underset{\sim}{N}_\sigma^T \underset{\sim}{D}_e^{-1} \underset{\sim}{N}_\sigma d\Omega \\
&= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^L \begin{bmatrix} (x-L) \\ (x-L)^2 \end{bmatrix} \frac{y^2}{I^2 E} [(x-L)(x-L)^2] dx dy dz \\
&= \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3} & -\frac{L^4}{3} \\ -\frac{L^4}{3} & \frac{L^5}{5} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\underset{\sim}{K}_{\sigma u}=\int_{\Omega}\underset{\sim}{N}_{\sigma}^{T}\underset{\sim}{L}^{T}\underset{\sim}{N}_{u}d\Omega=\int_{\Omega}\underset{\sim}{N}_{\sigma}^{T}\frac{d^{2}\underset{\sim}{N}_{u}}{dx^{2}}yd\Omega
$$

$$
=\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{0}^{L}\frac{y}{I}\begin{Bmatrix}(x-L)\\(x-L)^{2}\end{Bmatrix}[2\quad 6x]y\,dxdydz
$$

$$
=\begin{bmatrix}-L^{2} & -L^{3}\\ \frac{2}{3}L^{3} & \frac{L^{4}}{2}\end{bmatrix}
$$

$$
\underset{\sim}{P}=\int_{0}^{L}q\begin{Bmatrix}x^{2}\\x^{3}\end{Bmatrix}dx=\begin{bmatrix}\frac{qL^{3}}{3} & \frac{qL^{3}}{4}\end{bmatrix}^{T}
$$

将上述各式代入式(1.5.4),就有

$$
\left[\begin{array}{cc:cc}
\multicolumn{2}{c:}{-\frac{1}{EI}\begin{bmatrix}\frac{L^{3}}{3} & -\frac{L^{4}}{4}\\ -\frac{L^{4}}{4} & \frac{L^{5}}{5}\end{bmatrix}} & -L^{2} & -L^{3}\\
 & & \frac{2}{3}L^{3} & \frac{L^{4}}{2}\\ \hdashline
-L^{2} & \frac{2}{3}L^{3} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\underset{\sim}{0}$}}\\
-L^{3} & \frac{L^{4}}{2} & &
\end{array}\right]
\begin{Bmatrix}b_{1}\\b_{2}\\ \hdashline a_{3}\\a_{4}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\ \hdashline \frac{qL^{3}}{3}\\ \frac{qL^{4}}{4}\end{Bmatrix}
$$

解出上式中的 $\underset{\sim}{a}$ 与 $\underset{\sim}{b}$

$$
a_{1}=\frac{5qL^{2}}{24EI},\qquad a_{2}=-\frac{qL}{12EI}
$$

$$
b_{1}=0,\qquad b_{2}=\frac{q}{2}
$$

于是场函数

$$
w(x)=\underset{\sim}{N}_{u}\underset{\sim}{a}=[x^{2}\quad x^{3}]\begin{Bmatrix}\frac{5qL^{2}}{24EI}\\ -\frac{qL}{12EI}\end{Bmatrix}=\frac{5qL^{2}}{24EI}x^{2}-\frac{qL}{12EI}x^{3}
$$

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx} = \frac{10qL^2}{24EI}x - \frac{qL}{4EI}x^2$$

$$w(L) = \frac{qL^4}{8EI}, \quad \theta(L) = \frac{qL^3}{6EI} \qquad \text{（与精确解相同）}$$

$$M(x) = [(x-L) \quad (x-L)^2]\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{q}{2} \end{Bmatrix} = \frac{q(x-L)^2}{2}$$

$$M(0) = \frac{qL^2}{2} \qquad \text{（与精确解相同）}$$

由上例计算结果可以看到，悬臂梁自由端处的位移值与精确解相同，在固端处的反力亦与精确解相同. 但是其位移场函数与精确解不同.

下面，应用二类变量广义变分法求解梁的振动与轴压杆稳定问题. 对于梁的一般弯曲、振动与稳定性问题，由材料力学可知

$$\sigma_x = \frac{M}{I}z, \underset{\sim}{L}^T \underset{\sim}{u} = -z\frac{d^2w}{dx^2}, \frac{1}{2}\underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{D}_e^{-1}\underset{\sim}{\sigma} = \frac{\sigma_x^2}{2E}$$

将上式代入(1.5.1)并考虑梁的振动与轴压稳定性问题，就有

$$\Pi_{p2} = \int_\Omega \left(-\frac{M}{I}\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{M^2}{2EI^2}\right)z^2 dxdz - \int_0^L w^T q dx - \int_0^L \frac{1}{2}N\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx$$
$$- \int_0^L \frac{\lambda}{2}\bar{m}w^2 dx + \text{边界项} \qquad (1.5.6)$$

式中，λ 为梁振动特征值，$\bar{m}$ 为梁密度，N 为梁的纵向力.

假设二类场函数分别为

$$w = \underset{\sim}{N}_w \underset{\sim}{a}, M = \underset{\sim}{N}_M \underset{\sim}{b}$$

式中，$\underset{\sim}{N}_w$、$\underset{\sim}{N}_M$ 均为坐标的连续函数，选择这些函数时，要分别满足位移与力的边界条件，$\underset{\sim}{a}$ 与 $\underset{\sim}{b}$ 为待定常数. 将场函数代入式(1.5.6)，有

$$\Pi_{p2} = \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{K}_{WM} \underset{\sim}{b} - \frac{1}{2}\underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{K}_M \underset{\sim}{b}$$
$$- \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{P} - \frac{1}{2}N\underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{K}_G \underset{\sim}{a} - \frac{1}{2}\lambda\bar{m}\underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{K}_w \underset{\sim}{a} \qquad (1.5.7)$$

式中

$$\underset{\sim}{K}_{wM}=\int_0^L \underset{\sim}{N}_M^T \frac{d^2 \underset{\sim}{N}_w}{dx^2}dx$$

$$\underset{\sim}{K}_M=\int_0^L \frac{1}{EI}\underset{\sim}{N}_M^T \underset{\sim}{N}_M dx$$

$$\underset{\sim}{K}_G=\int_0^L \left(\frac{d\underset{\sim}{N}_w}{dx}\right)^T\left(\frac{d\underset{\sim}{N}_w}{dx}\right)dx \tag{1.5.8}$$

$$\underset{\sim}{K}_w=\int_0^L \underset{\sim}{N}_w^T \underset{\sim}{N}_w dx$$

$$\underset{\sim}{P}=\int_0^L \underset{\sim}{N}_w^T q dx$$

根据二类变量广义变分原理

$$\frac{\partial \Pi_{p2}}{\partial \underset{\sim}{a}}=\underset{\sim}{0},\frac{\partial \Pi_{p2}}{\partial \underset{\sim}{b}}=\underset{\sim}{0}$$

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{K}_{wM} \\ \underset{\sim}{K}_{wM}^T & -\underset{\sim}{K}_M \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{a} \\ \underset{\sim}{b} \end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{P} \\ \underset{\sim}{o} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} N\underset{\sim}{K}_G & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{a} \\ \underset{\sim}{b} \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} \lambda\overline{m}\underset{\sim}{K}_W & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{a} \\ \underset{\sim}{b} \end{Bmatrix} \tag{1.5.9}$$

例 1.2 应用二类变量广义变分法求解简支压杆的临界荷载. 由式(1.5.9)有

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{K}_{wM} \\ \underset{\sim}{K}_{wM}^T & -\underset{\sim}{K}_M \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{a} \\ \underset{\sim}{b} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} N\underset{\sim}{K}_G & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{a} \\ \underset{\sim}{b} \end{Bmatrix}$$

从上式消去$\underset{\sim}{b}$后,得方程为

$$(\underset{\sim}{K}_{wM}\underset{\sim}{K}_M^{-1}\underset{\sim}{K}_{wM}^T - N\underset{\sim}{K}_G)\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}$$

由上式可建立压杆稳定特征方程为

$$|\underset{\sim}{K}_{wM}\underset{\sim}{K}_M^{-1}\underset{\sim}{K}_{wM}^T - N\underset{\sim}{K}_G| = 0$$

现设定坐标函数为

$$N_w = \sin\frac{\pi x}{L}, N_M = \sin\frac{\pi x}{L}$$

由式(1.5.8)得

$$K_M = \int_0^L \frac{1}{EI}\sin^2\frac{\pi x}{L}dx = \frac{L}{2EI}, K_{wM} = \int_0^L \frac{\pi^2}{L^2}\cos^2\frac{\pi x}{L}dx = \frac{\pi^2}{2L}$$

$$K_G = \int_0^L (\frac{\pi}{L})^2\cos^2\frac{\pi x}{L}dx = \frac{\pi^2}{2L}$$

将上式各值代入稳定特征方程，得压杆临界荷载值为 $N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$（与精确解相同）.

例 1.3 应用二类变量广义变分法求固端梁的自振频率. 对梁的振动问题，由式(1.5.9)

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{K}_{wM} \\ \underset{\sim}{K}_{wM}^T & -\underset{\sim}{K}_M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{a} \\ \underset{\sim}{b} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\bar{m}\underset{\sim}{K}_w & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{a} \\ \underset{\sim}{b} \end{Bmatrix}$$

从上式中消去 $\underset{\sim}{b}$ 之后，得

$$(\underset{\sim}{K}_{wM}\underset{\sim}{K}_M^{-1}\underset{\sim}{K}_{wM}^T - \lambda\bar{m}\underset{\sim}{K}_w)\underset{\sim}{a} = \underset{\sim}{0}$$

于是梁的振动特征方程为

$$|\underset{\sim}{K}_{wM}\underset{\sim}{K}_M^{-1}\underset{\sim}{K}_{wM}^T - \lambda\bar{m}\underset{\sim}{K}_w| = 0$$

现选取固支梁的坐标函数

$$N_w = (x^2L^2 - 2x^3L + x^4), N_M = (2L^2 - 12Lx + 12x^2)$$

根据式(1.5.8)，得

$$K_M = \int_0^L \underset{\sim}{N}_M^T \underset{\sim}{N}_M \frac{1}{EI}dx = \frac{4L^5}{5EI}$$

$$K_{wM} = \int_0^L \underset{\sim}{N}_M^T \frac{d^2\underset{\sim}{N}_w}{dx^2}dx = -\frac{5L^5}{4}$$

$$K_w = \int_0^L \underset{\sim}{N}_w^T \underset{\sim}{N}_w dx = \frac{L^9}{630}$$

将上述各式代入梁振动特征方程，即得梁自振频率

$$\omega = \sqrt{\lambda} = \frac{22.45}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\overline{m}}} \qquad \text{（与精确解相同）}$$

1.6 三类变量广义变分原理

三类变量广义变分原理是分别由中国科学院院士胡海昌与日本学者，美国麻省理工学院（MIT）鹫津久一郎于1954，1955年间提出的，通常称胡-鹫津原理[22,23]，在弹性力学中，有三类变量广义势能原理与三类变量广义余能原理. 对于三类变量广义势能原理，有

$$\delta \Pi_{p3} = \underset{\sim}{0} \tag{1.6.1}$$

其中，三类变量广义势能泛函

$$\begin{aligned} \Pi_{p3}(\underset{\sim}{\sigma},\underset{\sim}{\varepsilon},\underset{\sim}{u}) = & \iint_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{D}_e \underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{f}^T \underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{\sigma}^T(\underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{L}^T \underset{\sim}{u})\right] d\Omega \\ & - \int_{S_u} [\underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{\sigma}]^T(\underset{\sim}{u} - \overline{\underset{\sim}{u}}) ds - \int_{S_\sigma} \overline{\underset{\sim}{p}}^T \underset{\sim}{u}\, ds \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

式（1.6.2）中，应力函数 $\underset{\sim}{\sigma}$，位移函数 $\underset{\sim}{u}$，应变函数 $\underset{\sim}{\varepsilon}$ 为三类独立的自变函数，而且均为待求未知函数. 对于三维弹性力学问题，共有15个未知函数，其中，Ω, S_u, S_σ 分别为物体所估的空间，已知位移的边界面和已知力的边界面. 容易验证由式（1.6.1）与（1.6.2）可得三维弹性力学的三套方程，即平衡、几何与物理方程及位移与力的边界条件.

对于三类变量广义余能原理，有

$$\delta \Pi_{c3} = \underset{\sim}{0} \tag{1.6.3}$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi_{c3}(\underset{\sim}{\sigma},\underset{\sim}{\varepsilon},\underset{\sim}{u}) = & \iint_{\Omega}\left\{\underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\underset{\sim}{\varepsilon}^T \underset{\sim}{D}_e \underset{\sim}{\varepsilon} + (\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{\sigma} + \underset{\sim}{f})^T \underset{\sim}{u}\right\} d\Omega \\ & - \int_{S_u} \underset{\sim}{p}^T \overline{\underset{\sim}{u}}\, ds - \int_{S_\sigma} (\underset{\sim}{p} - \overline{\underset{\sim}{p}})^T \underset{\sim}{u}\, ds \end{aligned} \tag{1.6.4}$$

三类变量广义余能原理亦是等价于三维弹性力学的三套方程，即平衡、几何与物理方程及位移与力的边界条件.其论证的详细过程见文献[22,23].

1.7 三类变量广义变分法

根据上述三类变量广义变分原理，可建立广义变分法的计算格式.应用广义变分法求解的问题时，首先选择三类场函数，它们需要满足强加的位移与力的边界条件，设有

$$u = \underset{\sim}{N}_u \underset{\sim}{a}, \qquad \sigma = \underset{\sim}{N}_\sigma \underset{\sim}{b}, \qquad \varepsilon = \underset{\sim}{N}_\varepsilon \underset{\sim}{c} \tag{a}$$

将式(a)代入式(1.6.2)有

$$\Pi_{p_3} = \frac{1}{2}\underset{\sim}{c}^T \underset{\sim}{K}_\varepsilon \underset{\sim}{c} - \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{K}_{\sigma\varepsilon} \underset{\sim}{c} + \underset{\sim}{b}^T \underset{\sim}{K}_{\sigma u} \underset{\sim}{a} - \underset{\sim}{a}^T \underset{\sim}{\bar{P}}$$

根据胡-鹫津原理

$$\frac{\partial \Pi_{p3}}{\partial \underset{\sim}{a}} = \underset{\sim}{0}, \frac{\partial \Pi_{p3}}{\partial \underset{\sim}{b}} = \underset{\sim}{0}, \frac{\partial \Pi_{p3}}{\partial \underset{\sim}{c}} = \underset{\sim}{0}$$

就有

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{K}_{\sigma u}^T & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{K}_{\sigma u} & \underset{\sim}{0} & -\underset{\sim}{K}_{\sigma\varepsilon} \\ \underset{\sim}{0} & -\underset{\sim}{K}_{\sigma\varepsilon}^T & \underset{\sim}{K}_\varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{a} \\ \underset{\sim}{b} \\ \underset{\sim}{c} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\bar{P}} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \end{Bmatrix} \tag{1.6.5}$$

其中

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{K}_\varepsilon &= \int_\Omega \underset{\sim}{N}_\varepsilon^T \underset{\sim}{D}_e \underset{\sim}{N}_\varepsilon d\Omega, \qquad \underset{\sim}{K}_{\sigma\varepsilon} = \int_{S_\sigma} \underset{\sim}{N}_\sigma^T \underset{\sim}{N}_\varepsilon d\Omega \\ \underset{\sim}{K}_{\sigma u}^T &= \int_\Omega N_\sigma^T L^T N_u d\Omega, \qquad \underset{\sim}{\bar{P}} = \int_{S_\sigma} \underset{\sim}{N}_u^T \underset{\sim}{p}\, d\Omega \end{aligned} \tag{1.6.6}$$

例 1.4 应用三类变量广义变分法求解简支梁的弯曲问题.

根据问题的边界情况，选择场函数中的 $\underset{\sim}{N}_u, \underset{\sim}{N}_\sigma, \underset{\sim}{N}_\varepsilon$ 分别为

$$N_u = \sin\frac{\pi x}{L}, \quad N_\varepsilon = z\sin\frac{\pi x}{L} \quad N_\sigma = z\sin\frac{\pi x}{L}$$

根据式(1.6.6),有

$$\underset{\sim}{K}_\varepsilon=\int_\Omega \underset{\sim}{N}_\varepsilon^T \underset{\sim}{D}_\varepsilon \underset{\sim}{N}_\varepsilon d\Omega=\int_\Omega Ez^2\sin^2\frac{\pi x}{L}dxdydz$$

$$=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_0^L Ez^2\sin^2\frac{\pi x}{L}dxdydz=EI\frac{L}{2}$$

$$\underset{\sim}{K}_{\sigma\varepsilon}=\int_\Omega \underset{\sim}{N}_\sigma^T \underset{\sim}{N}_\varepsilon d\Omega$$

$$=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_0^L z^2\sin^2\frac{\pi x}{L}dxdydz=I\frac{L}{2}$$

$$\underset{\sim}{K}_{\sigma u}=\int_\Omega \underset{\sim}{N}_\sigma^T \underset{\sim}{L}^T \underset{\sim}{N}_u d\Omega=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\int_0^L -z^2(\frac{\pi}{L})^2\sin^2\frac{\pi x}{L}dxdydz$$

$$=-I\frac{L}{2}(\frac{\pi}{L})^2$$

$$\underset{\sim}{\overline{P}}=\int_0^L q\sin\frac{\pi x}{L}dx=-q\cos(\frac{\pi x}{L})(\frac{L}{\pi})\Big|_0^L=\frac{2qL}{\pi}$$

由方程(1.6.5)得

$$\begin{bmatrix}0 & -I\frac{L}{2}(\frac{\pi}{L})^2 & 0\\ -I\frac{L}{2}(\frac{\pi}{L})^2 & 0 & -I\frac{L}{2}\\ 0 & -I\frac{L}{2} & EI\frac{L}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ b\\ c\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{2qL}{\pi}\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

联立解出上式,有

$$[a\quad b\quad c]^T=\left[\frac{4qL^4}{EI\pi^5}\quad -\frac{4qL^2}{I\pi^3}\quad -\frac{4qL^2}{EI\pi^3}\right]^T$$

这样,三类变量场函数及其最大值分别为

$$w=N_u a=\frac{4qL^4}{EI\pi^5}\sin\frac{\pi x}{L}$$

$$w_{\max}=\frac{4qL^4}{EI\pi^5}=\frac{qL^4}{76.51EI}\text{（精确解}\frac{5qL^4}{384EI}=\frac{qL^4}{76.8EI}\text{）}$$

$$\sigma=N_\sigma b=-z\frac{4qL^2}{I\pi^3}\sin\frac{\pi x}{L}$$

$$\sigma_{\max}=\frac{4qL^2}{I\pi^3}\cdot\frac{h}{2}=\frac{qL^2h}{15.503I}\qquad\text{（精确解}\frac{qL^2h}{16I}\text{）}$$

$$\varepsilon=N_\varepsilon C=-z\frac{4qL^2}{EI\pi^3}\sin\frac{\pi x}{L}$$

$$\varepsilon_{\max}=\frac{qL^2h}{15.503EI}\qquad\text{（精确解}\frac{qL^2h}{16EI}\text{）}$$

以上我们较为详细地论证了二、三类变量广义变分原理，并建立了广义变分法的计算格式，初步求解了一些简单问题．用广义变分法解算问题时，选择二、三类场函数时，需要满足相应的强加边界条件．对于连续性要求高的单元边界场函数的选择将遇到一定困难．下面几节将讨论选择样条插值函数作为场函数，简要介绍样条函数的构造，样条函数及其一、二阶导数和积分计算等问题．

1.8 样条插值函数

样条函数是在船舶、飞机等外形曲线的放样施工过程中总结出来的一种数学模型，它是现代函数逼近理论中的一个十分重要的分支．由于样条函数是一种广泛应用的数学工具，所以，它已经在最优控制、计算物理、计算机辅助外形设计与制造等领域中得到了应用．近十多年来，样条函数在结构分析、固体力学、流体力学及热传导等学科领域中也得到了应用，并有力地推动了这些学科迅速地向前发展．

由材料力学理论可知直梁在集中荷载作用下，其微分方程如式(1.8.1)所示

$$\frac{d^4S(x)}{dx^4}=\sum_{i=1}^{N-1}P_i\delta(x-x_i)\qquad(1.8.1)$$

式(1.8.1)的一般解答为

$$S(x) = C_0 + C_1 x + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 \frac{x^3}{6} + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{P_i (x - x_i)_+^3}{3!} \tag{1.8.2}$$

式中，$S(x)$为梁的挠曲线方程，$(x-x_i)_+$称截断式，对于任一正整数N，有

$$(x - x_i)_+^N = \begin{cases} (x - x_i)^N, & \text{当 } x - x_i \geqslant 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x - x_i < 0 \text{ 时} \end{cases} \tag{1.8.3}$$

若以图 1.3 所示简支梁全跨给定区间为$[a,b]$，其上均匀划分 $N-1$ 个

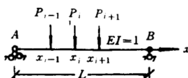


图 1.3

单元，$a=x_0<x_1<x_2\cdots<x_{N-1}<x_N=b$，其中，$x_i=x_0+ih$ 而$h=\dfrac{b-a}{N}$，$i=0,1,2,\cdots,N$，设在结点 $x_i(i=0-N)$处，三次样条函数值为 $S_0S_1\cdots S_N$. 式(1.8.2)就是三次样条函数，它的物理意义为梁在集中荷载作用下的挠曲线方程. 它具有下列性质：

1. 在域内的每一个子区间(x_i,x_{i+1})上，它是分段三次代数多项式.

2. 在区域$[a,b]$上，存在有函数值的全体集合.

3. 在区域$[a,b]$上，具有连续二阶导数的全体集合，在 x_i 处，函数的三阶导数左、右极限存在，但不相等，即有三阶导数的突变值.

4. 若 $P_i=0$，$(i=1,2,\cdots,N-1)$，则式(1.8.2)退化为普通三次代数式.

5. 若补充两个条件，即 $S'(x_0)=S'_0$，$S'(x_N)=S'_N$，则三次样条函数 $S(x)$可唯一确定.

在式(1.8.2)中，令 β_i 代替 P_i，则有

$$S(x)=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\beta_i(x-x_i)_+^3}{3!} \quad (1.8.4)$$

容易看出,式(1.8.4)中的待定系数有

$$C_i(i=0,1,2,3)+\beta_i(i=1,2,\cdots,N-1)$$
$$=4+N-1=N+3$$

由性质(2)和(5)可知,能唯一确定 $N+3$ 个待定常数,从而得三次样条函数 $S(x)$.

1.9 B 样条函数的构造

上述梁挠曲方程是由四阶微分方程式积分得到的.由此可以推论,对于给定区间$[a,b]$上的1个分划 Δ,由$(n+1)$阶微分方程

$$S^{(n+1)}(x)=\sum_{i=1}^{N-1}\beta_i\delta(x-x_i) \quad (1.9.1)$$

可建立 n 次样条函数,对上式积分$(n+1)$次,得

$$S(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_kx^k}{k!}+\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\beta_i(x-x_i)_{+1}^n}{n!} \quad (1.9.2)$$

式(1.9.2)有下列性质:

1. 在每一个子区间(x_i,x_{i+1})上,它是 n 次多项式.
2. 样条函数 $S(x)$ 及其 $n-1$ 阶导数在$[a,b]$上连续.
3. $S'(x)$在 x_i 点处的左、右极限存在,但不相等,有突变值.
4. 当 $\beta_i=0(i=1,2,\cdots,N-1)$时,则式(1.9.2)退化为普通的 n 次多项式.

应用上述 n 次样条函数去逼近任意函数,具有很好的适应性和灵活性,在许多科学、技术问题中,得到了广泛的应用.

若规定 δ_h 代表步长为 h 的对称差分算子,则有

$$\delta_hf(x)=f(x+\frac{h}{2})-f(x-\frac{h}{2})$$

$$\delta_h(x)=\frac{\delta_h}{h}\int_{-\infty}^{x}\delta(x)dx$$

考虑到$\frac{d}{dx} \doteq \frac{\delta_h}{h}$，则上式可写成

$$\delta_h(x) \doteq \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} \delta(x)dx = \delta(x) \tag{1.9.3}$$

这样，$\delta_h(x)$是$\delta(x)$的近似式，但是$\delta_h(x)$不再象$\delta(x)$有奇性了，而是通常的阶梯函数.

现对$\delta(x)$函数作$n+1$次积分与差分后，有

$$\underbrace{(\frac{\delta_h}{h}\int)\cdots(\frac{\delta_h}{h}\int)}_{(n+1)\text{次}} \delta(x) \underbrace{dx\cdots dx}_{(n+1)\text{次}}$$

对函数$\delta(x)$先作$(n+1)$次积分，再作$(n+1)$次差分后，仍是$\delta(x)$函数，但其光滑程度随着运算次数的增加而愈来愈光滑了.

对上式取步长$h=1$的情况，先作$(n+1)$次积分后，有

$$\underbrace{\iint\cdots\int}_{(n+1)}\delta(x)dx\cdots dx = \frac{x_+^n}{n!} + n\text{次多项式} \tag{1.9.4}$$

由于对n次多项式作$(n+1)$阶差分总为零，因此，对式(1.9.4)作$(n+1)$次对称差分，可得

$$\varphi_n(x) = \delta_h^{(n+1)}(\int\cdots\int\delta(x)dx\cdots dx) = \delta_h^{n+1}(\frac{x_+^n}{n!}) \tag{1.9.5}$$

式中，n为正整数.

若以E^λ表示位移算子，I表示单位算子，就有

$$E^\lambda f(x) = f(x+\lambda), If(x) = f(x) \tag{1.9.6}$$

若仍用对称差分算子δ_h，则

$$\delta_h f(x) = f(x+\frac{h}{2}) - f(x-\frac{h}{2}) = (E^{\frac{h}{2}} - E^{-\frac{h}{2}})f(x)$$

于是有

$$\delta_h = (E^{\frac{h}{2}} - E^{-\frac{h}{2}}) = (I - E^{-h})E^{\frac{h}{2}} \tag{1.9.7}$$

$$\delta_h^{n+1} = (I - E^{-h})^{n+1}E^{\frac{n+1}{2}h}$$

应用二项式展开定理，得

$$\delta_h^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}E^{(\frac{n+1}{2}-k)h} \tag{1.9.8}$$

由式(1.9.5)可得

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k\binom{n+1}{k}\left(x+\left(\frac{n+1}{2}-k\right)h\right)_+^n}{n!} \quad (1.9.9)$$

式中,n 为正整数,令

$$x_k=\left(k-\frac{n+1}{2}\right)h \quad (1.9.10)$$

则式(1.9.9)写成

$$\varphi_n(x)=\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}(x-x_k)_+^n/n! \quad (1.9.11)$$

式中,$\binom{n+1}{k}$表示二项式系数,即

$$\binom{n+1}{k}=\frac{(n+1)!}{k!(n-1-k)!} \quad (1.9.12)$$

由于 0! =1,若 $k=0$ 时

$$\binom{n+1}{0}=\frac{(n+1)!}{0!(n+1)!}=1$$

式(1.9.11)是一个分段式 n 次多项式,它的高阶导数为

$$\varphi_n^{(j)}(x)=\sum_{k}(-1)^k\binom{n+1}{k}(x-x_k)_+^{n-j}/(n-j)! \quad (1.9.13)$$

由上可知,$\varphi_n(x)$ 及其 1,2,…,$(n-1)$ 阶导数在区间$(-\infty,\infty)$上连续.$\varphi_n(x)$ 为一个 n 次样条函数,其中,x_k 为样条函数结点坐标. 式(1.9.11)称为 n 次样条函数.

对于等间距 h 的三次 B 样条函数,由式(1.9.11)有

$$\varphi_3(x)=\frac{1}{6h^3}\begin{cases}(x-x_{j-2})^3 & x_{j-2}\leqslant x\leqslant x_{j-1}\\ h^3+3h^2(x-x_{j-1})+3h(x-x_{j-1})^2 & \\ -3(x-x_{j-1})^3 & x_{j-1}\leqslant x\leqslant x_j\\ h^3+3h^2(x_{j+1}-x)+3h(x_{j+1}-x)^2 & \\ -3(x_{j+1}-x)^3 & x_j\leqslant x\leqslant x_{j+1}\\ (x_{j+2}-x)^3 & x_{j+1}\leqslant x\leqslant x_{j+2}\\ 0 & x \text{ 在 } x_{j-2},x_{j+2} \text{ 结点处及以外均为零}\end{cases}$$

(1.9.14)

式(1.9.14)三次B样条函数图形见图1.4a,它的一、二、三阶导数的图形见图1.4b,c,d.对于N个结点上各点三次B样条函数图形见图1.5.根据式(1.9.11)得出的三次B样条函数的分解图形见图1.6.

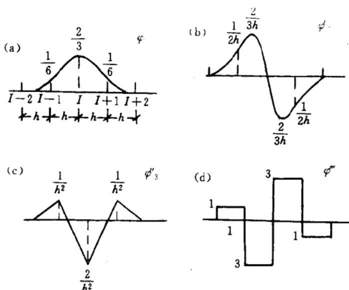


图1.4 三次B样条及其导数图形

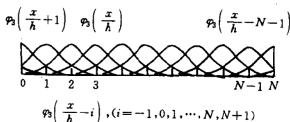


图1.5 多点三次B样条

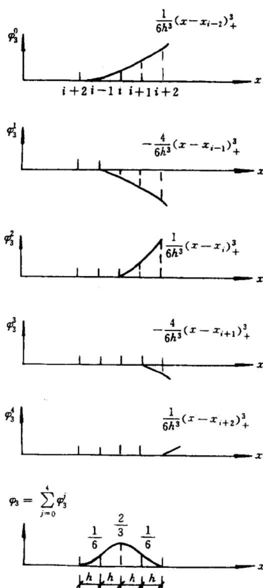


图 1.6　三次 B 样条函数的分解图形

1.10 三次B样条函数的积分计算

在结构分析中，常要用到一些三次 B 样函数的积分. 由于三次 B 样条函数是分段三次多项式，因此，它要逐段进行积分. 常用的积分有以下几种：

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{I}_{00} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{\Phi(x)\}^T \{\Phi(x)\} dx \\
\underset{\sim}{I}_{11} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{\Phi'(x)\}^T \{\Phi'(x)\} dx \\
\underset{\sim}{I}_{22} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{\Phi''(x)\}^T \{\Phi''(x)\} dx \\
\underset{\sim}{I}_{02} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{\Phi(x)\}^T \{\Phi''(x)\} dx \\
\underset{\sim}{I}_{01} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{\Phi'(x)\}^T \{\Phi(x)\} dx
\end{aligned}
\tag{1.10.1}
$$

式中

$$
\{\Phi(x)\}^T = [\varphi_{i-1}(x) \quad \varphi_i(x) \quad \varphi_{i+1}(x) \quad \varphi_{i+2}(x)] \tag{1.10.2}
$$

$\{\Phi'(x)\}^T$，$\{\Phi''(x)\}^T$，为$\{\Phi(x)\}^T$ 的一阶、二阶导数.

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{I}_{00} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \\ \varphi_{i+1} \\ \varphi_{i+2} \end{bmatrix} [\varphi_{i-1} \quad \varphi_i \quad \varphi_{i+1} \quad \varphi_{i+2}] dx \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} \varphi_{i-1}\varphi_{i-1} & \varphi_{i-1}\varphi_i & \varphi_{i-1}\varphi_{i+1} & \varphi_{i-1}\varphi_{i+1} \\ & \varphi_i\varphi_i & \varphi_i\varphi_{i+1} & \varphi_i\varphi_{i+2} \\ \text{对称} & & \varphi_{i+1}\varphi_{i+1} & \varphi_{i+1}\varphi_{i+2} \\ & & & \varphi_{i+2}\varphi_{i+2} \end{bmatrix} dx
\end{aligned}
\tag{1.10.3}
$$

式(1.10.3)的积分就是三次 B 样条函数 φ_{i-1}，φ_i，φ_{i+1}，φ_{i+2}间相互图乘积分的意义. 为了容易了解此积分的过程，现将 φ_{i-1}，φ_i，φ_{i+1}，φ_{i+2}的图形绘

出，如图 1.7 所示.

在图的阴线部分相互图乘并进行积分，即得 $\underset{\sim}{I}_{00}$ 的分段积分值. 现从式(1.9.14)中取出各段三次函数的具体式子，将其代入式(1.10.3)中，进行积分，即得 $\underset{\sim}{I}_{00}$ 值.

若划分均匀网格，间距为 h，则各积分式子为

$$\underset{\sim}{I}_{00}=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\{\Phi(x)\}^T\{\Phi(x)\}dx=\frac{h}{36}\begin{bmatrix}\frac{1}{7} & \frac{129}{140} & \frac{3}{7} & \frac{1}{140}\\ & \frac{297}{35} & \frac{933}{140} & \frac{3}{7}\\ & & \frac{297}{35} & \frac{129}{140}\\ & \text{对称} & & \frac{1}{7}\end{bmatrix} \tag{1.10.4}$$

式(1.10.4)为 $i-1,i,i+1,i+2$，4 个结点处三次 B 样条函数的图乘积分矩阵.

$$\underset{\sim}{I}_{11}=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\{\Phi'(x)\}^T\{\Phi'(x)\}dx=\frac{1}{36h}\begin{bmatrix}\frac{9}{5} & \frac{21}{10} & -\frac{18}{5} & -\frac{3}{10}\\ & \frac{51}{5} & -\frac{87}{10} & -\frac{18}{5}\\ & & \frac{51}{5} & \frac{21}{10}\\ & \text{对称} & & \frac{9}{5}\end{bmatrix} \tag{1.10.5}$$

式(1.10.5)为三次 B 样条函数的一阶导数图乘积分矩阵.

$$\underset{\sim}{I}_{22}=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\{\Phi''(x)\}^T\{\Phi''(x)\}dx=\frac{1}{36h^3}\begin{bmatrix}12 & -18 & 0 & 6\\ & 36 & -18 & 0\\ & & 36 & -18\\ & \text{对称} & & 12\end{bmatrix} \tag{1.10.6}$$

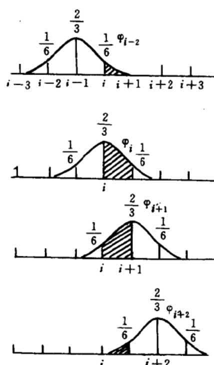


图 1.7

式(1.10.6)为三次 B 样条函数的二阶导数图乘积分矩阵.

$$\underset{\sim}{I}_{02} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{\Phi(x)\}^T\{\Phi''(x)\}dx = \frac{1}{36h}\begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{21}{10} & \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{99}{10} & -\frac{66}{5} & -\frac{33}{10} & \frac{33}{5} \\ \frac{33}{5} & -\frac{33}{10} & -\frac{66}{5} & \frac{99}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{5} & -\frac{21}{10} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

(1.10.7)

式(1.10.7)为三次 B 样条函数及其二阶导数的图乘积分矩阵.

$$\underset{\sim}{I}_{01} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{\Phi(x)\}^T\{\Phi'(x)\}dx$$

$$
=\frac{1}{36}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{9}{20} & \frac{9}{10} & \frac{1}{20} \\ -\frac{71}{20} & -\frac{15}{2} & \frac{183}{20} & \frac{19}{10} \\ -\frac{19}{10} & -\frac{183}{20} & \frac{5}{2} & \frac{71}{20} \\ -\frac{1}{20} & -\frac{9}{10} & \frac{9}{20} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{1.10.8}
$$

式(1.10.8)为三次 B 样条函数及其一阶导数的图乘积分矩阵. 利用上面各分段积分式,可形成结构的刚度矩阵.

1.11 三次、五次 B 样条函数的线性组合及其积分

在多变量样条有限元法中,要选择的场函数,预先必需满足问题的边界条件. 为了后面各章中,便利处理边界条件,图 1.8 各样条结点处三次 B 样条函数,即 $\Phi_i(x)$,$i=-1,0,1,\cdots,N+1$,它是一组$(N+3)$维的基样条,对它进行线性组合. 当 $N\geqslant 4$ 时,将头三个基函数线性组合成为

$$\Phi_{-1} = \varphi_3(\frac{x}{h}+1)$$

$$\Phi_0(x) = \varphi_3(\frac{x}{h}) - 4\varphi_3(\frac{x}{h}+1)$$

$$\Phi_1(x) = \varphi_3(\frac{x}{h}-1) - \frac{1}{2}\varphi_3(\frac{x}{h}) + \varphi_3(\frac{x}{h}+1)$$

将末三个函数也换成其线性组合为

$$\Phi_{N-1}(x) = \varphi_3(\frac{x}{h}-N+1) - \frac{1}{2}\varphi_3(\frac{x}{h}-N) + \varphi_3(\frac{x}{h}-N-1)$$

$$\Phi_N(x) = \varphi_3(\frac{x}{h}-N) - 4\varphi_4(\frac{x}{h}-N-1)$$

$$\Phi_{N+1} = \varphi_3(\frac{x}{h}-N-1)$$

经过修正后的三次 B 样条基函数图形，如图 1.8 与图 1.9 所示.

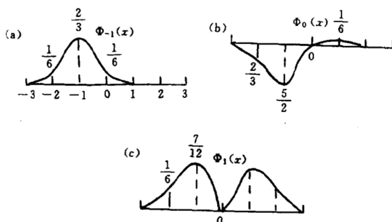
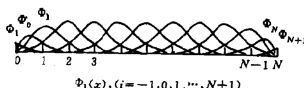


图 1.8 组合三次 B 样条



$\Phi_i(x),(i=-1,0,1,\cdots,N+1)$

图 1.9 多点修正三次 B 样条

当 $N\geqslant4$ 时，在 $[x_0,x_N]$ 内等分 N 段，三次 B 样条函数表达式

$$\Phi_{-1}(x)=\varphi_3(\frac{x}{h}+1)$$

$$\Phi_0(x)=\varphi_3(\frac{x}{h})-4\varphi_3(\frac{x}{h}+1)$$

$$\Phi_1(x)=\varphi_3(\frac{x}{h}-1)-\frac{1}{2}\varphi_3(\frac{x}{h})+\varphi_3(\frac{x}{h}+1)$$

$$\Phi_2(x)=\varphi_3(\frac{x}{h}-2)$$

……………………………………………

$$\Phi_{N-2}(x) = \varphi_3(\frac{x}{h} - N + 2)$$

$$\Phi_{N-1}(x) = \varphi_3(\frac{x}{h} - N + 1) - \frac{1}{2}\varphi_3(\frac{x}{h} - N) + \varphi_3(\frac{x}{h} - N - 1)$$

$$\Phi_N(x) = \varphi_3(\frac{x}{h} - N) - 4\varphi_3(\frac{x}{h} - N - 1)$$

$$\Phi_{N+1}(x) = \varphi_3(\frac{x}{h} - N - 1) \tag{1.11.1}$$

这组新的三次 B 基样条函数具有这样的特点，即：

当 $x=0$ 时

$$\Phi_k(0) = 0,(k \neq -1);\Phi'_k(0) = 0,(k \neq -1,0)$$

当 $x=L$ 时

$$\Phi_L(L) = 0,(k \neq N+1);\Phi'_k(L) = 0,(k \neq N,N+1) \tag{1.11.2}$$

上述基函数的特点使得边界问题的处理十分方便，详见下节.

同理，对五次 B 样条函数，亦可进行线性组合. 当 $N \geqslant 6$ 时，对各前 5 个和末 5 个基样条函数进行线性组合，结果如下：

$$\Psi_{-2}(x) = \varphi_5(\frac{x}{h} + 2)$$

$$\Psi_{-1}(x) = \varphi_5(\frac{x}{h} + 1) - 26\varphi_5(\frac{x}{h} + 2)$$

$$\Psi_0(x) = \frac{165}{4}\varphi_5(\frac{x}{h} + 2) - \frac{33}{8}\varphi_5(\frac{x}{h} + 1) + \varphi_5(\frac{x}{h})$$

$$\Psi_1(x) = \varphi_5(\frac{x}{h} + 1) - \frac{26}{33}\varphi_5(\frac{x}{h}) + \varphi_5(\frac{x}{h} - 1)$$

$$\Psi_2(x) = \varphi_5(\frac{x}{h} + 2) - \frac{1}{33}\varphi_5(\frac{x}{h}) + \varphi_5(\frac{x}{h} - 2)$$

$$\Psi_{N-2}(x) = \varphi_5(\frac{x}{h} - N - 2) - \frac{1}{33}\varphi_5(\frac{x}{h} - N) + \varphi_3(\frac{x}{h} - N + 2)$$

$$\Psi_{N-1}(x) = \varphi_5(\frac{x}{h} - N - 1) - \frac{26}{33}\varphi_5(\frac{x}{h} - N) + \varphi_3(\frac{x}{h} - N + 1)$$

$$\Psi_N(x) = \frac{165}{4}\varphi_5(\frac{x}{h} - N - 2) - \frac{33}{8}\varphi_5(\frac{x}{h} - N - 1) + \varphi_5(\frac{x}{h} - N)$$

$$\Psi_{N+1}(x) = \varphi_5(\frac{x}{h} - N - 1) - 26\varphi_5(\frac{x}{h} - N - 2)$$

$$\Psi_{N+2}(x) = \varphi_5(\frac{x}{h} - N - 2) \tag{1.11.3}$$

当 $N \geqslant 6$ 时,在$[x_0, x_N]$内等分 N 段,五次 B 基样条函数表达式为

$$\Psi_{-2}(x) = \varphi_5(\frac{x}{h} + 2)$$

$$\Psi_{-1}(x) = \varphi_5(\frac{x}{h} + 1) - 26\varphi_5(\frac{x}{h} + 2)$$

$$\Psi_0(x) = \frac{165}{4}\varphi_5(\frac{x}{h} + 2) - \frac{33}{8}\varphi_5(\frac{x}{h} + 1) + \varphi_5(\frac{x}{h})$$

$$\Psi_1(x) = \varphi_5(\frac{x}{h} + 1) - \frac{26}{33}\varphi_5(\frac{x}{h}) + \varphi_5(\frac{x}{h} - 1)$$

$$\Psi_2(x) = \varphi_5(\frac{x}{h} + 2) - \frac{1}{33}\varphi_5(\frac{x}{h}) + \varphi_5(\frac{x}{h} - 2)$$

$$\Psi_3(x) = \varphi_5(\frac{x}{h} - 3)$$

……………………………………………………

$$\Psi_{N-3}(x) = \varphi_5(\frac{x}{h} - N + 3)$$

$$\Psi_{N-2}(x) = \varphi_5(\frac{x}{h} - N + 2) - \frac{1}{33}\varphi_5(\frac{x}{h} - N) + \varphi_3(\frac{x}{h} - N + 2)$$

$$\Psi_{N-1}(x) = \varphi_5(\frac{x}{h} - N - 1) - \frac{26}{33}\varphi_5(\frac{x}{h} - N) + \varphi_5(\frac{x}{h} - N + 1)$$

$$\Psi_N(x) = \frac{165}{4}\varphi_5(\frac{x}{h} - N - 2) - \frac{33}{8}\varphi_5(\frac{x}{h} - N - 1) + \varphi_5(\frac{x}{h} - N)$$

$$\Psi_{N+1}(x) = \varphi_5(\frac{x}{h} - N - 1) - 26\varphi_5(\frac{x}{h} - N - 2)$$

$$\Psi_{N+2}(x) = \varphi_5(\frac{x}{h} - N - 2) \tag{1.11.4}$$

这组新的 5 次 B 基样条函数具有这样的特点,即

在左端点处 $x=0$

$$\Psi_k(0) = 0 \qquad (k \neq -2)$$
$$\Psi'_k(0) = 0 \qquad (k \neq -2, -1) \qquad (1.11.5)$$

当右端点处 $x=L$

$$\Psi_k(L) = 0 \qquad (k \neq N+2)$$
$$\Psi'_k(L) = 0 \qquad (k \neq N+1, N+2) \qquad (1.11.6)$$

根据式(1.11.1)和(1.11.4)，就可构造场函数，详见后面各章内容.

下面，对常用的一些样条函数的重要积分通过运算后得具体算式如下：

$$\underset{(N+3)\times(N+3)}{[A_{3x}^{22}]} = \int_0^L [\Phi''_i(x)]^T [\Phi''_j(x)] dx$$

$$(i = -1, 0, 1, \cdots, N, N+1)$$

$$(j = -1, 0, 1, \cdots, N, N+1)$$

$$= \int_0^L \begin{bmatrix} \Phi''_{-1} \\ \Phi''_0 \\ \vdots \\ \Phi''_N \\ \Phi''_{N+1} \end{bmatrix} [\Phi''_{-1} \Phi''_0 \cdots \Phi''_N \Phi''_{N+1}] dx$$

$$= \int_0^L \begin{bmatrix} \Phi''_{-1}\Phi''_{-1} & \Phi''_{-1}\Phi''_0 & \cdots & \Phi''_{-1}\Phi''_N & \Phi''_{-1}\Phi''_{N+1} \\ \Phi''_0\Phi''_{-1} & \Phi''_0\Phi''_0 & \cdots & \Phi''_0\Phi''_N & \Phi''_0\Phi''_{N+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi''_N\Phi''_{-1} & \Phi''_N\Phi''_0 & \cdots & \Phi''_N\Phi''_N & \Phi''_N\Phi''_{N+1} \\ \Phi''_{N+1}\Phi''_{-1} & \Phi''_{N+1}\Phi''_0 & \cdots & \Phi''_{N+1}\Phi''_N & \Phi''_{N+1}\Phi''_{N+1} \end{bmatrix} dx$$

该积分式，考虑到，当 $|i-j| \geqslant 4$，$\Phi_{ij}(\Phi_i\Phi_j) = 0$，这样得到带宽为 4 的方阵，即式(1.11.7).

$$
h^{-3}\begin{bmatrix}
\frac{1}{3} & -\frac{11}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & & \underset{\sim}{0} & \\
 & \frac{32}{3} & -\frac{9}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & & \\
 & & \frac{9}{2} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{12}^{*} & \frac{1}{6} & \\
 & & & \frac{8}{3} & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{6} \\
\text{对称} & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{bmatrix}
$$

(1.11.7)

当 $N=4$ 时，* 表示该项为$-\frac{1}{6}$.

$$
\underset{(N+3)\times(N+3)}{[A_{3x}^{11}]} = \int_0^L [\Phi_i']^T[\Phi_i']dx \ (i=-1,0,1,\cdots,N,N+1)
$$

$$
=h^{-1}\begin{bmatrix}
\frac{1}{20} & -\frac{17}{120} & -\frac{19}{240} & \frac{1}{120} & & & \underset{\sim}{0} & \\
 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{40} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{120} & & & \\
 & & \frac{27}{40} & -\frac{1}{30} & -\frac{47}{240}^{*} & -\frac{1}{120} & & \\
\text{对称} & & & \frac{2}{3} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{120} & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots &
\end{bmatrix}
$$

(1.11.8)

当 $N=4$ 时，* 表示该项为$-\frac{23}{120}$.

$$
\underset{(N+3)\times(N+3)}{[A_{3x}^{00}]} = \int_0^L [\Phi_i]^T[\Phi_i]dxi = -1,0,1,0,\cdots,N,N+1)
$$

$$
=h\begin{bmatrix}
\frac{1}{252} & \frac{7}{720} & \frac{31}{10080} & \frac{1}{5040} & & 0 & \\
 & \frac{31}{315} & \frac{5}{48} & \frac{29}{1260} & \frac{1}{5040} & & \\
 & & \frac{183}{560} & \frac{283}{1262} & \frac{239^{*}}{10080} & \frac{1}{5040} & \\
 & \text{对称} & & \frac{151}{315} & \frac{397}{1680} & \frac{1}{42} & \frac{1}{5040} \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{bmatrix}
$$

(1.11.9)

当 $N=4$ 时，* 表示该项为$\frac{17}{720}$.

$$
\underset{(N+3)\times(N+3)}{[A_{3x}^{02}]} = \int_0^L [\Phi_i]^T[\Phi_i'']dx \ (i=-1,0,1,\cdots,N,N+1)
$$

$$
=h^{-1}\begin{bmatrix}
\frac{1}{30} & -\frac{23}{120} & \frac{19}{240} & \frac{1}{120} & & 0 & \\
\frac{17}{120} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{40} & \frac{1}{6} & \frac{1}{120} & & \\
 & & -\frac{27}{40} & \frac{1}{30} & \frac{47^{*}}{240} & \frac{1}{120} & \\
 & & & -\frac{2}{3} & \frac{1}{8} & \frac{1}{5} & \frac{1}{120} \\
\text{对称} & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{bmatrix}
$$

(1.11.10)

当 $N=4$ 时，* 表示该项为$\frac{23}{120}$.

$$
\underset{(N+3)\times(N+3)}{[A_{3x}^{01}]} = \int_0^L [\Phi_i]^T[\Phi_i']dx \ (i=-1,0,1,\cdots,N,N+1)
$$

$$
=\begin{bmatrix}
-\frac{1}{72} & \frac{31}{720} & \frac{5}{288} & \frac{1}{720} & & \tilde{0} & \\
 & 0 & \frac{133}{720} & \frac{13}{180} & \frac{1}{720} & & \\
 & & 0 & \frac{109}{360} & \frac{37^{*}}{480} & \frac{1}{720} & \\
\text{反对称} & & & 0 & \frac{49}{144} & \frac{7}{90} & \frac{1}{720} \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{bmatrix} \quad (1.11.11)
$$

当 $N=4$ 时，* 表示该项为 $\frac{11}{144}$.

$$
\underset{(N+3)\times(N+3)}{[A_{3x}^{12}]} = \int_0^L [\Phi_i]^T[\Phi_i'']dx \quad (i=-1,0,1,\cdots,N,N+1)
$$

$$
=h^{-2}\begin{bmatrix}
-\frac{1}{8} & \frac{17}{24} & -\frac{13}{48} & -\frac{1}{24} & & \tilde{0} \\
\frac{7}{24} & -2 & \frac{35}{24} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{24} & \\
 & 0 & \frac{11}{12} & -\frac{5^{*}}{16} & -\frac{1}{24} & \\
\text{反对称} & & 0 & \frac{19}{24} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{24} \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{bmatrix}
$$

(1.11.12)

当 $N=4$ 时，* 表示该项为 $-\frac{7}{24}$.

$$
[A_{5x}^{00}] = \int_0^L [\Psi(x)]^T[\Psi(x)]dx \quad [A_{5x}^{11}] = \int_0^L [\Psi'(x)]^T[\Psi'(x)]dx
$$

$$
[A_{5x}^{02}] = \int_0^L [\Psi(x)]^T[\Psi''(x)]dx \quad [A_{53}^{00}] = \int_0^L [\Psi(x)]^T[\Phi(x)]dx
$$

$$
[A_{5x}^{22}] = \int_0^L [\Psi''(x)]^T[\Psi''(x)]dx \quad [A_{53}^{01}] = \int_0^L [\Psi(x)]^T[\Phi'(x)]dx
$$

$$
[A_{5x}^{01}] = \int_0^L [\Psi(x)]^T[\Psi'(x)]dx
$$

(1.11.13)

上述各积分具体形式，见下面各式. 它们的阶数分别为$(N+5)\times(N+5)$和$(N+5)\times(N+3)$

$$
[A_{5r}^{00}] = h/39916800 \left[\begin{array}{ccccc|cccccc}
252 & 2561 & 2361.875 & 1322.87875 & 374.30 & & & & & & \\
 & 94144 & 241941 & 229765.8185 & 89010.45 & & & & & & \\
 & & 1460247.75 & 2508196.27 & 1573369.69 & & & & & & \\
 & & & 746326.6035 & 8047284.296 & & & & & & \\
\text{对称} & & & & 15599958.86 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & 2010 & 1 & & & 0 & \\
 & & & & & 144279.75 & 2031.875 & 1 & & & \\
 & & & & & 2085264.5 & 151033.88 & 2035.21 & 1 & & \\
 & & & & & 9733489.6 & 2203426.3 & 152637 & 2036 & 1 & \\
 & & & & & 15724248 & 9738114 & 2203488.3 & 152636.96 & 2036 & 1 \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{array}\right]
\tag{1.11.14}
$$

$$
[A_{5r}^{11}] = 1/(362880h) \left[\begin{array}{ccccc|cccccc}
70 & -769 & -987.875 & -641.42 & -193.93 & & & & & & \\
 & 13376 & 4395 & -8744.72 & -6811.18 & & & & & & \\
 & & 48296.25 & 30534.90 & -20683.15 & & & & & & \\
 & & & 109641.34 & 40410.185 & & & & & & \\
 & & & & 139081.675 & & & & & & \\
 & \text{对称} & & & & & & & & & \\
 & & & & & -1 & & & & & \\
 & & & & & -526 & -1 & & & 0 & \\
 & & & & & -11583.75 & -495.875 & -1 & & & \\
 & & & & & -49300.90 & -13212.06 & -499.21 & -1 & & \\
 & & & & & 6081.27 & -59504.84 & -13604.96 & -500 & -1 & \\
 & & & & & 135912 & 5670 & -59520 & -13605 & -500 & -1 \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{array}\right]
\tag{1.11.15}
$$

$$[A_{5r}^{02}] = 1/(362880h)\left[\begin{array}{cccc} 56 & -1247 & 987.875 & 641.42 \\ 769 & -13376 & -4395 & 8744.72 \\ & & -48296.25 & -30534.90 \\ & & & -109641.34 \\ & & & \\ \text{对称} & & & \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 193.93 & 1 & & & & & \\ 6811.18 & 526 & 1 & & & & \\ 20683.1475 & 11583.75 & 495.875 & 1 & & 0 & \\ -40410.185 & 49300.90 & 13212.06 & 499.21 & 1 & & \\ -139081.675 & -6081.27 & 59504.84 & 13604.96 & 500 & 1 & \\ & -135912 & -5670 & 59520 & 13605 & 500 & 1 \\ & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{array}\right]$$

(1.11.16)

$$[A_{5r}^{22}] = 1/(5040h^3)\left[\begin{array}{cccc} 20 & -431 & 279.875 & 239.24 \\ & 9664 & -7659 & -5579.63 \\ & & 11967.75 & 3368.36 \\ & & & 8038.25895 \\ & & & \\ \text{对称} & & & \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 83.39 & 1 & & & & & \\ -1345.90 & 90 & 1 & & & & \\ -1663.034 & 279.75 & 111.875 & 1 & & & \\ 313.716253 & -2080.90 & 626.60 & 115.21 & 1 & 0 & \\ 5425.30027 & -1826.72 & -1635.5 & 716.96 & 116 & 1 & \\ & 5208 & -1806 & -1632 & 717 & 116 & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{array}\right]$$

(1.11.17)

$$
[A^{00}_{53}] = h/362880 \left[\begin{array}{cccc}
56 & 97 & 21.5 & 1 \\
769 & 5080 & 3417 & 476 \\
987.875 & 19314 & 25816.375 & 12578.5 \\
641.4242 & 24138.91 & 87928 & 77226.6667 \\
193.9394 & 18970.7272 & 83896 & 155748.3333 \\
1 & 498 & 14358 & 88234 \\
 & 1 & 501.5 & 14608 \\
 & & 1 & 502 \\
 & \underset{\sim}{0} & \ddots & \ddots
\end{array} \right.
$$

$$
\left. \begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
497.875 & 1 & & & \underset{\sim}{0} & & \\
14213.4848 & 501.2121 & 1 & & & & \\
88218.7878 & 14607.97 & 502 & 1 & & & \\
156190 & 88234 & 14608 & 502 & 1 & & \\
88234 & 156190 & 88234 & 14608 & 502 & 1 & \\
14608 & 88234 & 156190 & 88234 & 14608 & 502 & 1 \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{array} \right]
$$

(1.11.18)

$$
[A^{01}_{53}] = 1/40320 \left[\begin{array}{cccc}
-21.0 & 71.0 & 18.5 & 1 \\
-351.0 & 536.0 & 1081.0 & 220 \\
-564.125 & -2128.0 & 3261.375 & 3072.5 \\
-409.79 & -5147.3939 & -2303.8182 & 8384.2424 \\
-131.0303 & -3280.5151 & -9782.95 & -121.6061 \\
-1 & -242 & -3924 & -1132.6 \\
\underset{\sim}{0} & -1 & 245.5 & -4046 \\
 & & -1 & -246 \\
 & & \ddots & \ddots
\end{array} \right.
$$

$$
\left.\begin{matrix}
1 & & & & & & \\
241.875 & 1 & & & & & \\
3853.1818 & 245.2121 & 1 & & \underset{\sim}{0} & & \\
11318.5454 & 4045.9697 & 246 & 1 & & & \\
0 & 11326 & 4046 & 246 & 1 & & \\
-11326 & 0 & 11326 & 4046 & 246 & 1 & \\
-4046 & -11326 & 0 & 11326 & 4046 & 246 & 1 \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{matrix}\right]
$$

(1.11.19)

在样条有限元法中，也有荷载列阵的计算，这也需要涉及到样条函数的积分问题. 常见的有以下几种：

1. 均布荷载(三次B样条的情况)

$$\int_0^L [\Phi(x)]^T dx = h\left[\frac{1}{24}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{4}\ 1\cdots 1\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{24}\right]^T \quad (1.11.20)$$

2. 均布荷载(五次B样条的情况)

$$\int_0^L [\Psi(x)]^T dx = h\left[\frac{1}{720}\ \frac{2}{45}\ \frac{9}{40}\ \frac{20}{33}\ \frac{65}{66} 1\cdots 1\ \frac{65}{66}\ \frac{20}{33}\ \frac{9}{40}\ \frac{2}{45}\ \frac{1}{720}\right]^T$$

(1.11.21)

3. 线性分布荷载(三次B样条的情况)

$$\int_0^L x[\Phi(x)]^T dx =$$

$$h^2\left[\frac{1}{120}\ \frac{1}{5}\ \frac{9}{10}\ 2\ 3\ \cdots (N-2)\ \left(\frac{3N}{4}-\frac{9}{10}\right)\left(\frac{N}{3}-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{N}{240}-\frac{1}{120}\right)\right]^T$$

(1.11.22)

4. 线性分布荷载(五次B样条的情况)

$$\int_0^L x[\Psi(x)]^T dx = h^2\left[\frac{1}{5040}\ \frac{96}{5040}\ \frac{972}{5040}\ \frac{4154.1818}{5040}\ \frac{10038.5455}{5040} 3\right.$$

$$\cdots (N-3)\left(\frac{65N}{66}-\frac{10038.5455}{5040}\right)\left(\frac{20}{33}N-\frac{4154.1818}{5040}\right)$$

$$\left.\left(\frac{9N}{40}-\frac{972}{5040}\right)\left(\frac{2N}{45}-\frac{96}{5040}\right)\left(\frac{N}{720}-\frac{1}{5040}\right)\right]^T \quad (1.11.23)$$

5. 集中荷载(双三次B样条的情况)

$$\iint \delta(x-\xi,y-\eta)[\Phi(x)]\otimes[\Phi(y)]dxdy = [\Phi(\xi)]\otimes[\Phi(\eta)]$$
(1.11.24)

其中，ξ 及 η 为集中荷载作用点坐标值.

1.12 边界条件的处理

在多变量样条有限元法中，基本未知量是样条结点参数，而不是位移和力向量，因此，不能直接引入位移与力的边界条件，需要对样条基函数进行某些修改，从而使得便于处理边界条件. 把 $\Phi_i(x)$，$i=-1,0,1,\cdots,N,N+1$ 中的前三个基样条函数分别进行线性组合，如图 1.8 所示. 下面对常用的简支端和固支端来说明位移边界条件的处理方法，如图 1.10 所示.

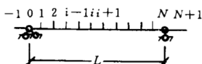


图 1.10

1.12.1 简支端

简支端的支座位移边界条件为

$$x=0, w(0)=0, x=L, w(L)=0$$

结构内任一结点 i 处的位移函数为

$$w_i(x)=C_{i-1}\Phi_{i-1}(x)+C_i\Phi_i(x)+C_{i+1}\Phi_{i+1}(x) \quad (1.12.1)$$

对结构左端处，位移的函数值由式(1.12.1)得

$$w(0)=C_{-1}\Phi_{-1}(0)+C_0\Phi_0(0)+C_1\Phi_1(0) \quad (1.12.2)$$

在式(1.12.2)中，由图 1.8 可知 $\Phi_{-1}(0)\neq 0$，$\Phi_0(0)=0$，$\Phi_1(0)=0$，若使 $w(0)=0$，则必有 $C_{-1}=0$. 这样，在多变量样条有限元法中，若结构左支座为简支情况，其位移边界条件为样条结点参数 C_{-1} 为零；同理，若结

构右支座为简支情况时，其位移边界条件为$C_{N+1}=0$.

1.12.2 固支端

设有一固支结构，若将它划分为N等分网格，如图1.11所示，

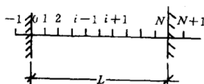


图1.11

固支端的支座位移边界条件为

$$x=0,\quad w(0)=0,\quad (\frac{dw}{dx})_0=0$$

$$x=L,\quad w(L)=0,\quad (\frac{dw}{dx})_L=0$$

结构内任一结点i处的位移函数为

$$w_i(x)=C_{i-1}\Phi_{i-1}(x)+C_i\Phi_i(x)+C_{i+1}\Phi_{i+1}(x) \qquad (1.12.3)$$

$$\theta_i(x)=C_{i-1}\frac{d\Phi_{i-1}(x)}{dx}+C_i\frac{d\Phi_i(x)}{dx}+C_{i+1}\frac{d\Phi_{i+1}(x)}{dx} \qquad (1.12.4)$$

对于结构左端处，线位移与角位移函数值由式(1.12.3)，(1.12.4)得

$$w_0=C_{-1}\Phi_{-1}(0)+C_0\Phi_0(0)+C_1\Phi_1(0) \qquad (1.12.5)$$

$$\theta_0=C_{-1}\frac{d\Phi_{-1}(0)}{dx}+C_0\frac{d\Phi_0(0)}{dx}+C_1\frac{d\Phi_1(0)}{dx} \qquad (1.12.6)$$

在式(1.12.5)，(1.12.6)中，由图1.8可知，$\Phi_{-1}(0)\neq0,\Phi_0(0)=0$，$\Phi_{-1}(0)=0,\frac{d\Phi_{-1}(0)}{dx}\neq0,\frac{d\Phi_0(0)}{dx}\neq0,\frac{d\Phi_1(0)}{dx}=0$. 根据固支边界位移条件，$w(0)=0,\theta(0)=0$，由式(1.12.5)，(1.12.6)可知，必有$C_{-1}=0$，$C_0=0$. 这样，在多变量样条有限元法中，若结构左支座为固支端情况时，其位移边界条件为样条结点参数C_{-1}，C_0均为零；同理，若结构右支

座为固支端时，其位移边界条件为$C_{N+1}=0$，$C_N=0$，对于板壳结构支座位移边界条件的处理，其方法与本节类同. 对于应用三次B样条函数常遇到的位移边界条件，其常数C_i的选择列表1-1.

表 1-1　C_i 选择　($i=-1,0,1,\cdots,N,N+1$)

边界条件	C_{-1}	C_0	C_N	C_{N+1}
固支-固支	0	0	0	0
简支-简支	0	C_0	C_N	0
自由-自由	C_{-1}	C_0	C_N	C_{N+1}
固支-简支	0	0	C_N	0
固支-自由	0	0	C_N	C_{N+1}
简支-自由	0	C_0	C_N	C_{N+1}
夹支-固支	C_{-1}	0	0	0
固支-夹支	0	0	0	C_{N+1}

第二章　基于二类变量广义变分原理的多变量样条有限元法

二类变量广义变分原理是由哈林格与赖斯纳(Hellinger and Reissner)提出的. 基于上述二类变量广义变分原理，赫尔曼(Herrmann)[36]提出了薄板弯曲的混合有限元法；密柴和奥尔生(Mriza and Olson)[45]提出了平面问题的混合有限元法. 沈鹏程等[64,67]于 1992 年，基于二类变量广义变分原理与样条插值函数，提出了多变量样条有限元法. 本章将详细介绍基于二类变量广义变分原理的多变量样条有限元法及其应用.

2.1　薄板弯曲的二类变量广义变分原理

薄板理论及其在工程上的应用均具有十分重要意义. 薄板分析可归结为一个四阶偏微分方程的边值与初值问题. 过去许多学者在理论与精确解法方面作出了许多重要贡献，见文献[25]. 但是，对那些形状、支承及荷载复杂情况下的薄板问题，应用解析解法求解就变得十分困难. 从 60 年代以来，由于计算机科学的迅速发展和有限元法的诞生，使薄板的分析计算发生了突破性进展. 在薄板的数值方法中，有有限元法[2]、有限差分法[25]等，但是它们均属于一类单变量数值方法，直接解出薄板的挠度近似值，然后通过薄板挠度函数的若干阶导数与物理关系才能求得板的弯矩、扭矩与剪力等近似值. 由于应用了若干阶导数而致使丧失了薄板内力值的精度. 本章将建立二类变量广义变分法和多变量样条有限元法，可直接求解薄板的内力与位移. 为此，本节先讨论薄板的二类变量广义变分原理.

薄板弯曲的二类变量广义变分原理[22]，即

$$\delta \Pi_{2p} = 0 \tag{2.1.1}$$

式中

$$
\begin{aligned}
\Pi_{2p} = & \int_{\Omega} \left(- M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{D}_b^{-1} \underset{\sim}{M} \, d\Omega - \int_{\Omega} q w d\Omega + \int_{C_1} M_n \left(\frac{\partial w}{\partial n} - \bar{\theta} \right) ds \\
& - \int_{C_1 + C_2} \left(\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + Q_n \right) (w - \bar{w}) ds - \int_{C_3} \bar{q} w ds - \int_{C_2 + C_3} \bar{M}_n \frac{\partial w}{\partial n} ds
\end{aligned}
\tag{2.1.2}
$$

Π_{2P} 称薄板弯曲的二类变量泛函；

C_1 固支边，$w=\bar{w}, \dfrac{\partial w}{\partial n}=\bar{\theta}$；

C_2 简支边，$w=\bar{w}, M_n=\bar{M}_n$； (2.1.3)

C_3 自由边，$M=\bar{M}_n, \dfrac{\partial M_{ns}}{\partial s}+Q_n=\bar{q}$

$$
\underset{\sim}{M} = [M_x \quad M_y \quad M_{xy}]^T \tag{2.1.4}
$$

$$
\underset{\sim}{D}_b = D_b \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}
$$

$$
D_b = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \tag{2.1.5}
$$

$\underset{\sim}{D}_b$ 为板弹性矩阵，D_b 为板弹性常数，E 为弹性模量，μ 为泊松比，t 为板厚度.

对于齐次边界条件下，薄板弯曲的二类变量泛函定义为

$$
\Pi_{2p} = \int_{\Omega} \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{\chi} \, d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{D}_b^{-1} \underset{\sim}{M} \, d\Omega - \int_{\Omega} q w d\Omega \tag{2.1.6}
$$

关于内力矩 $\underset{\sim}{M}$ 和挠度 w. 对二类变量泛函取驻值，就有

$$\int_{\Omega}\delta \underset{\sim}{M}^{T}(\underset{\sim}{\bar{B}}\, w - \underset{\sim}{D_b^{-1}}\underset{\sim}{M})d\Omega + \int_{\Omega}(\underset{\sim}{M}^{T}\delta\underset{\sim}{\chi} - q\delta w)d\Omega = \underset{\sim}{0}$$

对于简支板的情况，对上式的第三项进行二次分部积分，并利用简支边界条件，上式变为

$$\int_{\Omega}\delta \underset{\sim}{M}^{T}(\underset{\sim}{\bar{B}}\, w - \underset{\sim}{D_b^{-1}}\underset{\sim}{M})d\Omega + \int_{\Omega}(\underset{\sim}{\bar{B}}^{T}\underset{\sim}{M} - q)\delta w d\Omega = \underset{\sim}{0}$$

考虑到变分 $\delta\underset{\sim}{M}$，δw 在板域内不为零的任意微小值，即得板的几何方程（或物理）和平衡方程如下：

$$\underset{\sim}{\chi} = \underset{\sim}{\bar{B}}\, w = \underset{\sim}{D_b^{-1}}\underset{\sim}{M} \quad 在板域\ \Omega\ 内 \tag{2.1.7}$$

$$w = \bar{w} = 0 \quad 在板域\ \Omega\ 边界上 \tag{2.1.8}$$

$$\underset{\sim}{\bar{B}}^{T}\underset{\sim}{M} - q = 0 \quad 在板域\ \Omega\ 内 \tag{2.1.9}$$

$$M_x = \bar{M}_x = 0 \quad 或\ M_y = \bar{M}_y = 0 \quad 在板域\ \Omega\ 边界上 \tag{2.1.10}$$

若将式(2.1.7)代入式(2.1.9)，即得薄板弯曲的基本方程式

$$\underset{\sim}{\bar{B}}^{T}\underset{\sim}{D_b}\underset{\sim}{\bar{B}}\, w = q \tag{2.1.11}$$

式中

$$\underset{\sim}{\bar{B}} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\right]^{T} \tag{2.1.12}$$

由上可知，薄板弯曲的边值问题等价其二类变量泛函关于内力矩与挠度的变分问题，或者等价于二类变量泛函的驻值问题.

2.2 基于二类变量广义变分原理的广义变分法

上节论证了薄板弯曲的广义变分原理. 对于薄板的振动与稳定问题，二类变量广义变分原理也成立. 本节介绍基于二类变量广义变分原理的广义变分法求解薄板的弯曲、振动与稳定问题.

对于矩形薄板弯曲、振动与稳定分析的二类变量的泛函，在齐次边界条件下，定义为

$$\Pi_{2p} = \int_{\Omega}\underset{\sim}{M}^{T}\underset{\sim}{\bar{B}}\, w d\Omega - \int_{\Omega}\frac{1}{2}\underset{\sim}{M}^{T}\underset{\sim}{D_b}^{-1}\underset{\sim}{M}\, d\Omega - \int_{\Omega} q w d\Omega$$

$$-\int_{\Omega}\frac{1}{2}\omega^2\bar{m}w^2 d\Omega-\int_{\Omega}\frac{1}{2}\underset{\sim}{\bar{Q}}^T\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{\bar{Q}}\,d\Omega \tag{2.2.1}$$

式中　ω 为薄板自振频率,$\bar{m}$ 为质量密度,$\underset{\sim}{N}$ 为薄板中面力.

$$\underset{\sim}{\bar{Q}}=[\frac{\partial w}{\partial x}\quad \frac{\partial w}{\partial y}]^T,\ \underset{\sim}{N}=\begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{yx} & N_y \end{bmatrix} \tag{2.2.2}$$

设内力矩与位移的独立场函数分别为

$$\underset{\sim}{M}=\underset{\sim}{N}_M(x,y)\underset{\sim}{r}\,;w=\underset{\sim}{N}_w(x,y)\underset{\sim}{a} \tag{2.2.3}$$

式中

$$\underset{\sim}{N}_M=\underset{\sim}{N}_W=\begin{bmatrix}\varphi_1(x,y) & & 0 \\ & \varphi_2(x,y) & \\ 0 & & \varphi_3(x,y)\end{bmatrix} \tag{2.2.4}$$

$$\underset{\sim}{r}=[b\quad c\quad d]^T \tag{2.2.5}$$

对于 $\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y),\varphi_3(x,y)$ 和 $\underset{\sim}{N}_M,\underset{\sim}{N}_W$ 选择,是根据力和位移的相应边界条件来确定,它们都是坐标 x,y 连续函数.

现将式(2.2.3)—(2.2.5)代入(2.2.1),由二类变量广义变分原理,即

$$\frac{\partial \Pi_{2p}}{\partial \underset{\sim}{a}}=\underset{\sim}{0},\frac{\partial \Pi_{2p}}{\partial \underset{\sim}{r}}=\underset{\sim}{0}$$

得

$$\begin{bmatrix}-\underset{\sim}{K}_{MM} & \underset{\sim}{K}_{wM} \\ \underset{\sim}{K}_{wM}^T & \underset{\sim}{0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{r} \\ \underset{\sim}{a}\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{\bar{P}}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \omega^2\underset{\sim}{M}_\lambda\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{r} \\ \underset{\sim}{a}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{K}_G\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{r} \\ \underset{\sim}{a}\end{Bmatrix} \tag{2.2.6}$$

式中

$$\underset{\sim}{K}_{MM}=\int_{\Omega}\underset{\sim}{N}_M^T\underset{\sim}{D}_b^{-1}\underset{\sim}{N}_M d\Omega,\quad \underset{\sim}{K}_{wM}=\int_{\Omega}\underset{\sim}{N}_M^T\underset{\sim}{\bar{B}}\,\underset{\sim}{N}_w d\Omega \tag{2.2.7}$$

$$\underset{\sim}{M}_{\lambda}=\int_{\Omega}\overline{m}\underset{\sim}{N}_{w}^{T}\underset{\sim}{N}_{w}d\Omega,\quad \underset{\sim}{K}_{G}=\int_{\Omega}\underset{\sim}{N}_{w}^{'T}\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{N}_{w}^{'}d\Omega$$

$$\underset{\sim}{N}_{w}^{'}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \underset{\sim}{N}_{w}}{\partial x} & \dfrac{\partial \underset{\sim}{N}_{w}}{\partial y}\end{bmatrix}^{T} \tag{2.2.8}$$

$$\underset{\sim}{\overline{P}}=\int_{\Omega}\underset{\sim}{N}_{w}^{T}qd\Omega \tag{2.2.9}$$

对于薄板弯曲问题，有

$$\left[\begin{array}{c:c}-\underset{\sim}{K}_{MM} & \underset{\sim}{K}_{wM}\\ \hdashline \underset{\sim}{K}_{wM}^{T} & \underset{\sim}{0}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{c}\underset{\sim}{r}\\ \hdashline \underset{\sim}{a}\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}\underset{\sim}{0}\\ \hdashline \underset{\sim}{\overline{P}}\end{array}\right\} \tag{2.2.10}$$

对于薄板的振动问题，由式(2.2.6)，得板的振动模态方程为

$$(\underset{\sim}{\widetilde{K}}-\omega^{2}\underset{\sim}{M}_{\lambda})\underset{\sim}{a}=\underset{\sim}{0} \tag{2.2.11}$$

对于薄板的稳定模态方程为

$$(\underset{\sim}{\widetilde{K}}-\underset{\sim}{K}_{G})\underset{\sim}{a}=\underset{\sim}{0} \tag{2.2.12}$$

式中

$$\underset{\sim}{\widetilde{K}}=\underset{\sim}{K}_{wM}^{T}\underset{\sim}{K}_{MM}^{-1}\underset{\sim}{K}_{wM} \tag{2.2.13}$$

式(2.2.10)，(2.2.11)，(2.2.12)和(2.2.13)分别为薄板弯曲、振动与稳定分析的基本公式.

2.3 数值算例

根据上节导出的基本公式，对薄板的弯曲、振动与稳定问题作出具体解答. 四边简支矩形薄板承受分布与均布荷载分别为 $q=q_0\sin\dfrac{\pi x}{L}\times\sin\dfrac{\pi y}{L}$ 和 q_0，见图 2.1.

2.3.1 薄板的弯曲问题

设内力矩与位移场函数分别为

$$w=\underset{\sim}{N}_{w}(x,y)\underset{\sim}{a}$$

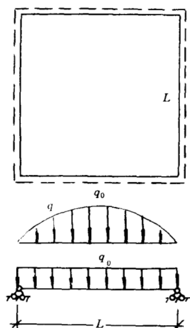


图 2.1

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{N}_M(x,y)\underset{\sim}{r}$$

式中

$$\underset{\sim}{N}_M(x,y) = \begin{bmatrix} \sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L} & & \\ & \sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L} & \\ & & \sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L} \end{bmatrix}$$

$$N_w(x,y) = \sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L}, \quad \underset{\sim}{r} = [b\ c\ d]^T$$

根据上述场函数的具体形式，由式(2.2.7)可算得

$$\underset{\sim}{K}_{MM} = \int_0^L\int_0^L \underset{\sim}{N}_M^T \underset{\sim}{D}_b^{-1} \underset{\sim}{N}_M d\Omega$$

$$
= \frac{1}{D_b(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} \frac{L^2}{4} & -\mu\frac{L^2}{4} & 0 \\ -\mu\frac{L^2}{4} & \frac{L^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1+\mu)L^2}{2} \end{bmatrix}
$$

$$
K_{wM} = \int_0^L\int_0^L N_M^T B N_w d\Omega = \left[\frac{\pi^2}{4} \ \frac{\pi^2}{4} \ -\frac{\pi^2}{2}\right]^T
$$

对于分布荷载情况

$$
q = q_0 \sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L}
$$

$$
P = \int_0^L\int_0^L N_w^T q_0 \sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L} d\Omega = \frac{q_0 L^2}{4}
$$

对于均布荷载情况

$$
q = q_0, P = \int_0^L\int_0^L N_w^T q_0 d\Omega = \frac{4q_0L^2}{\pi^2}
$$

于是,薄板弯曲问题的系统方程由式(2.2.10),对于分布荷载情况,有

$$
\left[\begin{array}{c:c} \frac{-1}{D_b(1-\mu^2)}\begin{bmatrix} \frac{L^2}{4} & -\mu\frac{L^2}{4} & 0 \\ -\mu\frac{L^2}{4} & \frac{L^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1+\mu)L^2}{2} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \frac{\pi^2}{4} \\ \frac{\pi^2}{4} \\ -\frac{\pi^2}{2} \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi^2}{4} & -\frac{\pi^2}{2} \end{matrix} & 0 \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} b \\ c \\ d \\ \hdashline a \end{array}\right\}
$$

$$
= \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline \frac{q_0L^2}{4} \end{array}\right\}
$$

从上式解得

$$a=\frac{q_0L^4}{4D_b\pi^4}, b=c=(1+\mu)\frac{q_0L^2}{4\pi^2}, d=-(1-\mu)\frac{q_0L^2}{4\pi^2}$$

表 2-1 四边简支方板承受正弦荷载时板心挠度、弯矩与角点扭矩值

方 法	D_bw/q_0L^4	M_x/q_0L^2	M_{xy}/q_0L^2
广义变分法	0.002566471	0.0329294	0.0177312
S. Timoshenko [25]	0.0025665	0.03293	0.018041

表 2-2 四边简支方板承受均布荷载时板心挠度、弯矩与角点扭矩值

方 法	D_bw/q_0L^4	M_x/q_0L^2	M_{xy}/q_0L^2
广义变分法	0.0041606	0.053384	0.02874475
S. Timoshenko [25]	0.00416	0.054318	0.0297759
精确解	0.00406	0.0479	0.0325

2.3.2 四边简支方板的最低自振频率的计算

在式(2.2.11)中,有质量矩阵 M_λ,由该式得

$$\underset{\sim}{\overline{M}}_\lambda=\int_0^L\int_0^L \overline{m}\underset{\sim}{N}_w^T\underset{\sim}{N}_w d\Omega=\overline{m}\frac{L^2}{4}$$

根据式(2.2.13),计算 $\underset{\sim}{\widetilde{K}}$

$$\underset{\sim}{\widetilde{K}}=\underset{\sim}{K}_{wM}\underset{\sim}{K}_{MM}^{-1}\underset{\sim}{K}_{wM}$$

即

$$\underset{\sim}{K}_{wM}^T\underset{\sim}{K}_{MM}^{-1}\underset{\sim}{K}_{wM}$$

$$=\left[\frac{\pi^2}{4}\ \frac{\pi^2}{4}\ -\frac{\pi^2}{2}\right]\left(\frac{1}{D_b(1-\mu^2)}\begin{bmatrix}\frac{L^2}{4} & -\mu\frac{L^2}{4} & 0\\ -\mu\frac{L^2}{4} & \frac{L^2}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{(1+\mu)L^2}{2}\end{bmatrix}\right)$$

$$
\times \begin{Bmatrix} \dfrac{\pi^2}{4} \\ \dfrac{\pi^2}{4} \\ -\dfrac{\pi^2}{2} \end{Bmatrix} = -\frac{D_b \pi^4}{L^2}
$$

于是由式(2.2.11),得薄板最低自振频率的特征方程为

$$
|\tilde{\underset{\sim}{K}} - \omega^2 \underset{\sim}{M}_\lambda| = 0
$$

由上式得

$$
\omega = \frac{2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{D_b}{\overline{m}}} = \frac{19.7379}{L^2}\sqrt{\frac{D_b}{\overline{m}}} \text{(与精确解相同)}
$$

2.3.3 四边简支薄板单向最小临界荷载的计算

由式(2.2.8),计算几何刚度矩阵

$$
\underset{\sim}{K}_G = \int_\Omega \underset{\sim}{N}'^T_w \underset{\sim}{N}\ \underset{\sim}{N}'_w d\Omega = \int_0^L\int_0^L N_x\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cos^2\frac{\pi x}{L}\sin^2\frac{\pi y}{L} d\Omega = \frac{\pi^2}{4}N_x
$$

由式(2.2.12)得临界荷载的特征方程为

$$
|\tilde{\underset{\sim}{K}} - \underset{\sim}{K}_G| = 0
$$

由上式解出薄板单向最小临界荷载值为

$$
N_x = \frac{4\pi^2 D_b}{L^2} = 39.4784\frac{D_b}{L^2} \qquad \text{(与精确解相同)}
$$

2.4 多变量样条有限元法解薄板弯曲问题

薄板的弯曲问题,已有多种方法[25,28,30]可以求解.但是,直接求得二类变量值,这类方法还较少,本节基于二类变量广义变分原理,采用样条函数构造两类场函数,导出多变量样条有限元法计算格式.这里,给出若干数值算例,由于位移 w 与内力矩 M_x,M_y,M_{xy}四个变量同时给出,因此,位移与内力矩的精度均较高.设薄板边界分别为简支、固支与自由,如图 2.2 所示.

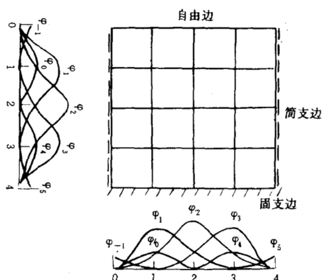


图 2.2 各种支承的矩形薄板

2.4.1 场函数

薄板的位移场函数与力场函数均由三次 B 样条函数来构造，即有

$$
\underset{\sim}{M}=\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}
=\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) & & \underset{\sim}{0} \\ & \underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) & \\ \underset{\sim}{0} & & \underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{A} \\ \underset{\sim}{B} \\ \underset{\sim}{C} \end{Bmatrix} \tag{2.4.1}
$$

$$
w=\underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(x)\underset{\sim}{D} \tag{2.4.2}
$$

式中，$\Phi(x)$，$\Phi(y)$ 详见第一章式(1.11.1)．$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{C}$ 和 $\underset{\sim}{D}$ 都是待求常数．

2.4.2 多变量样条有限元法方程

将式(1.11.1)，(2.4.1)与(2.4.2)代入式(2.2.1)，根据二类变量

广义变分原理，有

$$\frac{\partial \Pi_{2p}}{\partial \underset{\sim}{A}} = \underset{\sim}{0}, \frac{\partial \Pi_{2p}}{\partial \underset{\sim}{B}} = \underset{\sim}{0}, \frac{\partial \Pi_{2p}}{\partial \underset{\sim}{C}} = \underset{\sim}{0}, \frac{\partial \Pi_{2p}}{\partial \underset{\sim}{D}} = \underset{\sim}{0}$$

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{F} & \underset{\sim}{H} \\ \underset{\sim}{H}^T & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{A} \\ \underset{\sim}{B} \\ \underset{\sim}{C} \\ \underset{\sim}{D} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{P} \end{Bmatrix} \tag{2.4.3}$$

$$\underset{\sim}{F} = \begin{bmatrix} -\frac{12}{Et^3}\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & \frac{12}{Et^3}\mu \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & \underset{\sim}{0} \\ & -\frac{12}{Et^3}\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & \underset{\sim}{0} \\ \text{对称} & & -\frac{24(1+\mu)}{Et^3}\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} \end{bmatrix} \tag{2.4.4}$$

$$\underset{\sim}{H} = [-\underset{\sim}{A}_x^{02} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} \quad -\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{02} \quad -2\underset{\sim}{A}_x^{01} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{01}]^T \tag{2.4.5}$$

对于分布荷载，荷载列阵为

$$\underset{\sim}{P} = \int_\Omega q(x,y)\underset{\sim}{\Phi}^T(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}^T(y)d\Omega \tag{2.4.6}$$

对于集中荷载，荷载列阵为

$$\underset{\sim}{P} = P\underset{\sim}{\Phi}^T(\zeta) \otimes \underset{\sim}{\Phi}^T(\eta) \tag{2.4.7}$$

式中，ζ,η 为集中荷载的作用点坐标.

$$\underset{\sim}{A}_x^{ij} = \int_0^L \underset{\sim}{\Phi}^{iT}(x)\underset{\sim}{\Phi}^j(x)dx \qquad (x = x,y;i,j = 0,1,2) \tag{2.4.8}$$

式(2.4.8)详见第一章中有关公式.

2.5 多变量样条有限元法解薄板的振动与稳定问题

若考虑薄板自由振动与稳定性问题，在式(2.1.6)中，需要引入薄板的动能项与中面力势能项，这时薄板在齐次边界条件下的二类变量广义势能泛函改为

$$
\begin{aligned}
\Pi_{2p} = & \int_{\Omega} \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{\chi}\, d\Omega - \frac{1}{2}\int_{\Omega} \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{D}_b^{-1} \underset{\sim}{M}\, d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \frac{1}{2}\bar{m}\lambda w^2 d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{2}\underset{\sim}{Q}^T \underset{\sim}{N}\, \underset{\sim}{Q}\, d\Omega
\end{aligned} \tag{2.5.1}
$$

将式(2.4.1)与(2.4.2)代入(2.5.1)，根据二类变量广义势能原理，得下列方程组

$$
\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \underset{\sim}{F} & \underset{\sim}{H} \\ \underset{\sim}{H}^T & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{r} \\ \underset{\sim}{D} \end{Bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \lambda \underset{\sim}{M}_\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{r} \\ \underset{\sim}{D} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{K}_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{r} \\ \underset{\sim}{D} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.5.2}
$$

式中

$$
\underset{\sim}{r}^T = [\underset{\sim}{A}^T \quad \underset{\sim}{B}^T \quad \underset{\sim}{C}^T]^T \tag{2.5.3}
$$

$$
\underset{\sim}{M}_\lambda = m\, \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} \tag{2.5.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{K}_G = & \underset{\sim}{A}_x^{11} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} Nx + (\underset{\sim}{A}_x^{01} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{01T} N_{xy} + \underset{\sim}{A}_x^{01^T} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{01} N_{yx}) \\
& + \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{11} N_y
\end{aligned} \tag{2.5.5}
$$

2.6 数值算例

根据上面所建立的计算公式，我们编制了计算程序，下面一些数值算例是在 VAX-11/780 超级小型计算机上实现的，其计算成果列于下述各表中.

设有四边简支与固支方板，分别受均布荷载和板中点处的竖直集中荷载. 已知板的弹性模量 $E=2.6\times10^{-5}\text{kN/m}^2$，板厚度 $t=0.1\text{m}$，板长 $L=5\text{m}$，泊松比 $\mu=0.3$，$q=1\text{kN/m}^2$，$P=1\text{kN}$. 计算结果列于表 2-3 与 2-4 中.

表 2-3　四边简支板的中点挠度与弯矩值

方法	网格	均布荷载		集中荷载	
		w(m)	M_x(kN-m/m)	w(m)	M_x(kN-m/m)
多变量样条	4×4	0.1145667	1.2906447	0.01276787	0.2453077
有限元法	6×6	0.114362	1.2080810	0.01254380	0.2735119
精确解 [25]		0.1066370	1.1971500	0.01218080	

表 2-4　四边固支板的中点的挠度与弯矩值

方法	网格	均布荷载		集中荷载	
		w	M_x	w	M_x
多变量样条	4×4	0.0331497	0.5244000	0.00573531	0.1745660
有限元法	6×6	0.0331764	0.5799510	0.0058459	0.2194220
精确解 [25]		0.0332147	0.5742628	0.0058926	

对于薄板的自由振动问题，由式(2.5.2)可得板振动的模态方程和特征方程

$$(\underset{\sim}{\widetilde{K}}-\lambda \underset{\sim}{M_\lambda})\underset{\sim}{D}=\underset{\sim}{0} \tag{2.6.1}$$

和

$$|\underset{\sim}{\widetilde{K}}-\lambda \underset{\sim}{M_\lambda}|=0 \tag{2.6.2}$$

式中

$$\underset{\sim}{\widetilde{K}}=-\underset{\sim}{H^T}\underset{\sim}{F^{-1}}\underset{\sim}{H} \tag{2.6.3}$$

对于薄板的稳定问题，其特征方程为

$$|\underset{\sim}{\widetilde{K}}-\underset{\sim}{K_G}|=0 \tag{2.6.4}$$

有了公式(2.6.2)，(2.6.4)，(2.5.4)，(2.5.5)和式(2.6.3)之后，就可以用它们来计算薄板的振动和稳定问题. 下面，给出若干数值算例，其

计算成果分别列于下述各表中.

表 2-5　四边简支板自振频率

m,n	网格	多变量样条有限元法	精确解[44]
		α^*	
$\omega_{1,1}$	8×8	19.73387	19.74
$\omega_{2,1}$	8×8	49.34739	49.35
$\omega_{3,1}$	8×8	78.95469	78.95
$\omega_{2,2}$	8×8	98.70766	98.64

$\omega = \alpha^* \frac{1}{L^2}\left(\frac{D_b}{\overline{m}t}\right)^{1/2}, \mu = 0.3$

表 2-6　四边简支板在细分网格下自振频率收敛情况

网 格	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{2,2}$
4×4	19.73923	49.38513	79.01062	100.75174
6×6	19.73886	49.34992	78.95966	98.79032
8×8	19.73387	49.34739	78.95649	98.70766

表 2-7　四边固支板在细分网格下自振频率收敛情况

网格	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{2,2}$
4×4	36.01731	73.74091	108.82559	134.59386
6×6	35.99366	73.43199	108.32896	132.00426
8×8	35.98793	73.40506	108.25762	131.64781
[44]	35.99	73.41	108.30	131.60

表 2-8　两对边简支,另两对边固支板,在网格细分下的自振频率收敛情况

网格	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
4×4	28.95979	54.86541	69.59309	94.90040	104.38136	131.90736
6×6	28.95244	54.76415	69.33943	94.62939	102.36386	129.46341
8×8	28.95030	54.74785	69.32851	94.59936	102.24642	129.13942
[44]	28.95	54.74	69.32	94.59	102.2	

表 2-9　一边固支，另三边简支板，在细分网格下，自振频率的收敛情况

网格	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
4×4	23.65015	51.74423	58.74947	86.28145	102.36620
6×6	23.64658	51.68347	58.65156	85.15998	100.38531
8×8	23.64513	51.67347	58.64604	86.14058	100.28543
[44]	23.64	51.67	58.65	86.13	100.3

对于薄板稳定问题，下面给出若干数值算例，其计算结果列于下述各表中.

表 2-10　四边简支板的临界荷载值

m, n	网格	多变量样条有限元法	精确解[26]
1.1	8×8	39.47793	39.4784
2.1	8×8	61.68469	61.6850
3.1	8×8	109.67264	109.6513
2.2	8×8	157.90319	157.9137
3.2	8×8	185.32854	185.3292
		β^*	

$N_{cr}=\beta^*\dfrac{D_b}{L^2}$.

表 2-11　四边简支板，在细分网格下，临界荷载的收敛情况

网格	β_1^*	β_2^*	β_3^*	β_4^*	β_5^*
4×4	100.73963	118.88789	191.66954	256.44552	466.21
6×6	99.52531	115.06507	197.60793	246.52496	280.6
8×8	99.45093	114.69134	193.01726	245.88824	268.37

表 2-12　一边固支，另三边简支，在细分网格下，临界荷载的收敛情况

网格	β_1^*	β_2^*	β_3^*	β_4^*	β_5^*
4×4	56.67126	67.75257	116.69423	188.38025	203.27509
6×6	56.65626	67.65720	113.32440	182.69057	188.01094
8×8	56.65462	67.64323	113.21436	180.98572	187.95581
10×10	56.65325	67.63533	113.19552	180.82361	187.93956

表 2-13　各种形式的板的临界荷载值

板形式	网格	多变量样条有限元法	精确解[26]
SSSS	4×4	39.47838	39.4784
	6×6	39.47815	
	8×8	39.47793	
FFFF	4×4	100.73963	99.3869
	6×6	99.52531	
	8×8	99.45039	
FSFS	4×4	76.17279	75.8973
	6×6	75.96350	
	8×8	75.92529	
SFSF	4×4	67.3582	66.5211
	6×6	66.58875	
	8×8	66.55947	

S——简支，F——固支

2.7　多变量样条有限元法解弹性地基矩形板

弹性地基板结构在工程上有着广泛应用，随着科学技术和工程建设的迅速发展，弹性地基模型及计算方法也得到了相应的发展，如地基模型有文克尔地基、符拉索夫地基及半无限弹性体地基等. 它们适应于不同的实际地基情况，在计算上有多种方法，如有限差分法、有限元法、边界元法和样条有限元法等. 本节将介绍多变量样条有限元法在弹性地基板上的应用.

对于文克尔弹性地基板弯曲、振动与稳定问题，在齐次边界条件下，其二类变量广义势能泛函定义为

$$\Pi_{2Ps} = \int_{\Omega} \underset{\sim}{M}^{T} \underset{\sim}{\chi}\, d\Omega - \frac{1}{2}\int_{\Omega} \underset{\sim}{M}^{T} \underset{\sim}{D}_{r}^{-1} \underset{\sim}{M}\, d\Omega - \frac{1}{2}\int_{\Omega} \lambda \bar{m} w^{2} d\Omega$$

$$
-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\tilde{\bar{Q}}^{T}\tilde{N}\,\tilde{\bar{Q}}\,d\Omega+\frac{1}{2}\int_{\Omega}k_{r}w^{2}d\Omega-\int_{\Omega}qwd\Omega \qquad (2.7.1)
$$

式中，k_r 为弹性地基常数，由实验确定. 引入 $\bar{k}$ 常数，$\bar{k}=\frac{k_e L^4}{D}$，$\lambda$ 为弹性振动特征值.

将位移与力的场函数，即式(2.4.1)与(2.4.2)代入式(2.7.1)，根据二类变量广义势能原理，就得到弹性地基板的多变量样条有限元法方程如下：

$$
\begin{bmatrix} \tilde{F} & \tilde{H} \\ \tilde{H}^{T} & \tilde{K}_{E} \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \\ \tilde{D} \end{Bmatrix}
=\begin{Bmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \tilde{P} \end{Bmatrix}
+\begin{bmatrix} \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \lambda\tilde{M}_{\lambda} \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \\ \tilde{D} \end{Bmatrix}
+\begin{bmatrix} \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{K}_{G} \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \\ \tilde{D} \end{Bmatrix}
\qquad (2.7.2)
$$

式(2.7.2)、(2.4.3)与式(2.5.2)基本相同，只有弹性地基刚阵 K_E 是新引入的，其表达式为

$$
\tilde{K}_{E}=k_{e}\tilde{A}_{x}^{00}\otimes\tilde{A}_{y}^{00} \qquad (2.7.3)
$$

根据式(2.7.2)可分别得到文克尔弹性地基板的弯曲、振动与稳定问题的方程如下：对于弯曲问题，有

$$
\begin{bmatrix} \tilde{F} & \tilde{H} \\ \tilde{H}^{T} & \tilde{K}_{E} \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \\ \tilde{D} \end{Bmatrix}
=\begin{Bmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \tilde{P} \end{Bmatrix} \qquad (2.7.4)
$$

对于振动问题

$$(-\underset{\sim}{H}^T\underset{\sim}{F}^{-1}\underset{\sim}{H}+\underset{\sim}{K}_E-\lambda\underset{\sim}{M}_\lambda)\underset{\sim}{D}=\underset{\sim}{0} \tag{2.7.5}$$

对于稳定性问题

$$(-\underset{\sim}{H}^T\underset{\sim}{F}^{-1}\underset{\sim}{H}+\underset{\sim}{K}_E-\underset{\sim}{K}_G)\underset{\sim}{D}=\underset{\sim}{0} \tag{2.7.6}$$

根据式(2.7.4),(2.7.5)与(2.7.6)即可计算弹性地基板的弯曲、振动与稳定性问题.下面根据上述计算公式,编制了计算机程序,给出若干数值算例的结果,列表于下.

表 2-14　四边简支弹性地基板中点处的挠度与弯矩值,板承受均布荷载

网格		wD_b/qL^4	M_x/qL^2	M_y/qL^2
	4×4	0.00406299	0.04783820	0.04783819
$k=0$	6×6	0.00406251	0.04787836	0.04787837
	8×8	0.00406247	0.04788553	0.04788527
	[25]	0.00406	0.0478	0.0478
	4×4	0.00401026	0.04716437	0.04716437
$k=5$	6×6	0.00400984	0.04720538	0.04720547
	8×8	0.00400980	0.04721240	0.04721251
	4×4	0.00321323	0.03699015	0.03699016
$k=100$	6×6	0.00321370	0.03704277	0.03704283
	8×8	0.00321376	0.03705036	0.03705054

表 2-15　四边简支弹性地基板中点处的挠度与弯矩值,板中点承受集中荷载

网格	wD_b/PL^2	M_x/P	M_y/P
$k=0$　8×8	0.01158290	0.30245459	0.30245376
$k=5$　8×8	0.01145236	0.30075213	0.30075252
$k=100$　8×8	0.00947683	0.27489784	0.27489838
[25] $k=0$	0.0116		

表 2-16　四边固支弹性地基板中点处的挠度与弯矩值，板承受均布荷载

网格	wD_b/qL^4	M_x/qL^2	M_y/qL^2
$k=0$　8×8	0.0126547	0.02282157	0.02282151
[43]	0.00126532	0.0229051	0.0229051
$k=5$　8×8	0.00126032	0.02271701	0.02271698
$k=100$　8×8	0.00117055	0.0287563	0.02887559

表 2-17　两对边简支，另两边固支弹性地基板中点处的挠度与弯矩值，板承受均布荷载

网格	wD_b/qL^4	M_x/qL^2	M_y/qL^2
$k=0$　8×8	0.00191725	0.02437094	0.03319115
[25]	0.00192	0.0244	0.332
$k=5$　8×8	0.00190544	0.241899	0.03296587
$k=100$　8×8	0.00170500	0.02128551	0.02914535

表 2-18　一边固支，另三边简支弹性地基板中点处的挠度与弯矩值，板承受均布荷载

网格	wD_b/qL^4	M_x/qL^2	M_y/qL^2
$k=0$　10×10	0.00278551	0.03388780	0.03918416
[25]	0.0028	0.034	0.039
$k=5$　10×10	0.00278019	0.03354631	0.03879767
$k=100$　10×10	0.00235216	0.02804886	0.03257535

表 2-19　四边简支弹性地基板的自振频率，板剖分为不同网格

网格		β^*			
k=100	4×4	22.12875	50.38742	79.64095	101.24675
	6×6	22.12721	50.35295	79.59053	99.29522
	8×8	22.12417	50.35065	79.58733	99.21275
k=5	4×4	19.86536	49.43576	79.04226	100.77653
	6×6	19.86563	49.40061	78.99137	98.81565
	8×8	19.86105	49.397798	78.98844	98.73292
k=0	4×4	19.73923	49.38513	79.01062	100.75174
	6×6	19.73886	49.34992	78.95966	98.79032
	8×8	19.73381	49.34739	78.95649	98.70766
[48]		19.74	49.35	78.95	98.64

$\omega=\beta^*\cdot\frac{1}{L^2}\left(\frac{D_b}{mt}\right)^{1/2}$

表 2-20　四边固支弹性地基板的自振频率，板剖分为不同网格

网格		β^*			
k=0	4×4	36.01713	73.74091	108.82559	134.59386
	6×6	35.99368	73.43199	108.32896	132.00426
	8×8	35.98793	73.40506	108.25762	131.64781
[48]		35.99	73.41	108.3	131.6
k=5	4×4	36.08667	73.77477	108.84856	134.61244
	6×6	36.06297	73.46604	108.35204	132.02321
	8×8	36.05709	73.43912	108.28067	131.66678
k=100	4×4	37.37978	74.41585	109.28408	134.96483
	6×6	37.35698	74.10978	108.78954	132.38249
	8×8	37.35135	74.08309	108.71854	132.02705

表 2-21　两对边简支，另两边固支弹性地基板的自振频率

网格	β^*				
k=0　8×8	28.95030	54.74785	69.32851	94.59936	102.24642
[48]	28.95	54.74	69.32	94.59	102.2
k=100　8×8	30.62778	55.65341	70.04597	95.12680	102.85112

表 2-22　一边固支,另三边简支弹性地基板自振频率

网格	α^*				
$\bar{k}=0$　8×8	23.64313	51.67646	58.64604	86.14058	100.28543
[28]	23.64	51.67	58.65	86.13	100.3
$\bar{k}=100$　8×8	25.67234	52.64376	59.51242	86.7395	100.91338

表 2-23　两对边简支,另两边固支弹性地基板的临界荷载

网格	β^*
$\bar{k}=100$　10×10	78.44795　95.05546　118.76863　184.45959
$\bar{k}=0$　8×8	75.92520　84.92478　117.67709　184.01385
[48]	75.8973

表 2-24　一边固支,另三次简支弹性地基板的临界荷载

网格	β^*
$\bar{k}=100$　10×10	66.78571　70.17223　114.32134　181.45645　190.47241

$N_{cr}=\beta^* \dfrac{D_b}{L^2}$

2.8　样条有限元法解中厚度矩形板弯曲

基于经典薄板理论的数值分析,已有大量的研究工作,如有限差分法[25]、有限元法[2]、有限条法[4]、样条有限元法[51]等.对于确实为薄板的情况,应用 Kirchoff 假设,是有足够的精度.但对于非各向同性体的薄板和不是较薄的板,应用经典薄板理论来分析问题将会产生较大的误差,这是由于未考虑板的横向剪切的结果.近 20 年来,厚板的解法得到迅速发展[81,82].本节应用乘积型二元三次 B 样条插值函数,应用势能原理建立厚板的样条有限元法计算格式,并给出若干数值结果.

2.8.1　基本方程

米特林(Mindlin R.D.)[37]提出了基于铁木生柯(Timoshenko)厚

梁理论的中厚板弯曲的解法. 根据米特林板理论的假设,中厚板的广义位移为

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= z\theta_x(x,y) \\
v(x,y) &= z\theta_y(x,y) \\
w(x,y) &= w(x,y)
\end{aligned}
\tag{2.8.1}
$$

式中,w、θ_x、θ_y 分别为沿 z 方向的挠度和 xz 与 yz 平面的转角. 沿板单位长度上的弯矩、扭矩和剪力可以用广义位移来表示,它们的矩阵表达式如下:

$$
\underset{\sim}{M} = [M_x, M_y, M_{xy}]^T = D_b \underset{\sim}{D}^T \underset{\sim}{\Delta} \tag{2.8.2}
$$

$$
\underset{\sim}{Q} = [Q_x, Q_y]^T = \underset{\sim}{C_b} \underset{\sim}{E}^T \underset{\sim}{\Delta} \tag{2.8.3}
$$

式中,$\underset{\sim}{D}$ 和 $\underset{\sim}{E}$ 分别为矩阵微分算子,其形式为

$$
\underset{\sim}{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{2.8.4}
$$

$$
\underset{\sim}{E} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.8.5}
$$

D_b、C_b 分别为板的弯曲与剪切刚度阵. 其中

$$
\underset{\sim}{\Delta} = [w \quad \theta_x \quad \theta_y]^T \tag{2.8.6}
$$

$$
C_b = \frac{5Et}{12(1+\mu)} = k_\tau G t, k_\tau = \frac{5}{6}
$$

$$
D_b = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \tag{2.8.7}
$$

μ 是泊松比,E 是杨氏模量.

应用广义位移分量表示的平衡方程式如下:

$$(D_b \underset{\sim}{\bar{B}}_d^T + C_b \underset{\sim}{\bar{C}}_d^T) \underset{\sim}{\Delta} = \underset{\sim}{P} \tag{2.8.8}$$

式中，矩阵微分算子为

$$\underset{\sim}{\bar{B}}_d^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) & \left(\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right) \\ 0 & \left(\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right) & \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \end{bmatrix} \tag{2.8.9}$$

$$\underset{\sim}{\bar{C}}_d^T = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) & -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.8.10}$$

荷载向量

$$P = [q \quad m_x \quad m_y]^T \tag{2.8.11}$$

板的边界条件，简支边，$w = 0$， $\theta_y = 0$， $M_x = 0$

固支边，$w = 0$， $\theta_x = \theta_y = 0$ (2.8.12)

自由边，$M_x = M_{xy} = Q_x = 0$

对于齐次边界条件下，中厚板的总势能泛函为

$$\Pi_p(w,\theta_x,\theta_y) = \frac{D_b}{2}\int_\Omega [(\underset{\sim}{a}_0^T \underset{\sim}{\Delta})^2 + \frac{1-\mu}{2}(\underset{\sim}{a}_1^T \underset{\sim}{\Delta})^2] d\Omega$$

$$+ \frac{C_b}{2}\int_\Omega [(\underset{\sim}{c}_1^T \underset{\sim}{\Delta})^2 + \underset{\sim}{a}_2^T \underset{\sim}{\Delta})^2] d\Omega - \int_\Omega \underset{\sim}{\Delta}^T \underset{\sim}{p}\, d\Omega \tag{2.8.13}$$

式中

$$\underset{\sim}{a}_0 = [0 \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y}]^T$$

$$\underset{\sim}{a}_1 = [0 \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad -\frac{\partial}{\partial x}]^T \tag{2.8.14}$$

$$\underset{\sim}{C}_1 = [\frac{\partial}{\partial x} \quad -1 \quad 0]^T$$

$$\underset{\sim}{C}_2 = [\frac{\partial}{\partial y} \quad 0 \quad 1]^T \tag{2.8.15}$$

根据最小总势能原理，对于简支边界情况，有

$$\delta\Pi_p(w,\theta_x,\theta_y)$$
$$=D_b\int_\Omega \delta\underset{\sim}{\Delta}^T \underset{\sim}{B}_b^T \underset{\sim}{\Delta}\, d\Omega + C_b\int_\Omega \delta\underset{\sim}{\Delta}^T \underset{\sim}{C}_d^T \underset{\sim}{\Delta}\, d\Omega - \int_\Omega \delta\underset{\sim}{\Delta}^T \underset{\sim}{P}\, d\Omega = \underset{\sim}{0} \tag{2.8.16}$$

式中

$$\underset{\sim}{B}_d^T = \underset{\sim}{a}_0 \underset{\sim}{a}_0^T + (1-\mu)/2 \cdot \underset{\sim}{a}_1 \underset{\sim}{a}_1^T \tag{2.8.17}$$

$$\underset{\sim}{C}_d^T = \underset{\sim}{C}_1^T \underset{\sim}{C}_1 - \underset{\sim}{C}_2^T \underset{\sim}{C}_2 \tag{2.8.18}$$

在边界上

$$w = M_x = M_y = 0 \tag{2.8.19}$$

由于变分$\delta\underset{\sim}{\Delta}$为不等于零的任意微小值，所以由式(2.8.16)得到板的平衡方程及边界条件为式(2.8.8)和(2.8.12).

2.8.2 样条有限元方程

应用样条函数构造中厚板的位移场函数为

$$\underset{\sim}{\Delta} = \underset{\sim}{\Psi}(x,y)\underset{\sim}{W} \tag{2.8.20}$$

式中

$$\underset{\sim}{W} = [\underset{\sim}{A}^T \quad \underset{\sim}{B}^T \quad \underset{\sim}{C}^T]^T \tag{2.8.21}$$

$$\underset{\sim}{\Psi} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) & & \underset{\sim}{0} \\ & \underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) & \\ \underset{\sim}{0} & & \underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) \end{bmatrix} \tag{2.8.22}$$

其中，$\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{C}$为待定常数列阵.

将式(2.8.20)代入式(2.8.13)，得离散型总势能泛函

$$\Pi_p = \frac{D_b}{2}[\underset{\sim}{B}^T\underset{\sim}{A}_x^{11}\otimes \underset{\sim}{A}_y^{00}\underset{\sim}{B} + 2\mu\underset{\sim}{B}^T\underset{\sim}{A}_x^{10}\otimes\underset{\sim}{A}_y^{01}\underset{\sim}{C} + \underset{\sim}{C}^T\underset{\sim}{A}_x^{00}\otimes\underset{\sim}{A}_y^{11}\underset{\sim}{C}$$
$$- (1-\mu)/2(\underset{\sim}{B}^T\underset{\sim}{A}_x^{00}\otimes\underset{\sim}{A}_y^{11}\underset{\sim}{B} + 2\underset{\sim}{B}^T\underset{\sim}{A}_x^{01}\otimes\underset{\sim}{A}_y^{10}\underset{\sim}{C} + \underset{\sim}{C}^T\underset{\sim}{A}_x^{11}$$

$$\otimes \underset{\sim}{A}_y^{00}\underset{\sim}{C}] + \frac{C_b}{2}[\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}_x^{11} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00}\underset{\sim}{A} - 2\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}_x^{10} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00}\underset{\sim}{B}$$

$$- \underset{\sim}{B}^T\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00}\underset{\sim}{B} + \underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{11}\underset{\sim}{A} - 2\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{10}\underset{\sim}{C}$$

$$- \underset{\sim}{C}^T\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00}\underset{\sim}{C}] - \underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{\bar{P}} - \underset{\sim}{B}^T\underset{\sim}{M}_x - \underset{\sim}{C}^T\underset{\sim}{M}_y \qquad (2.8.23)$$

根据最小总势能原理$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \underset{\sim}{A}} = \frac{\partial \Pi_p}{\partial \underset{\sim}{B}} = \frac{\partial \Pi_p}{\partial \underset{\sim}{C}} = \underset{\sim}{0}$，得厚板样条有限元法方程

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{K}_{11} & \underset{\sim}{K}_{12} & \underset{\sim}{K}_{13} \\ & \underset{\sim}{K}_{22} & \underset{\sim}{K}_{23} \\ \text{对称} & & \underset{\sim}{K}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{A} \\ \underset{\sim}{B} \\ \underset{\sim}{C} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\bar{P}} \\ \underset{\sim}{\bar{M}}_x \\ \underset{\sim}{\bar{M}}_y \end{Bmatrix} \qquad (2.8.24)$$

式中

$$\underset{\sim}{K}_{11} = C_b[\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} + \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{11}]$$

$$\underset{\sim}{K}_{12} = -C_b\underset{\sim}{A}_x^{10} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00}$$

$$\underset{\sim}{K}_{13} = -C_b\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00}$$

$$\underset{\sim}{K}_{22} = D_b\underset{\sim}{A}_x^{11} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} + \frac{(1-\mu)}{2}D_b\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{11} + C_b\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00}$$

$$\underset{\sim}{K}_{23} = \mu D_b\underset{\sim}{A}_x^{10} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{01} + D_b(1-\mu)/2\underset{\sim}{A}_x^{01} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{10}$$

$$\underset{\sim}{K}_{33} = D_b\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{11} + (1-\mu)/2D_b\underset{\sim}{A}_x^{11} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} + C_b\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00}$$

(2.8.25)

式中

$$\underset{\sim}{A}_x^{ij} = \int_0^L \underset{\sim}{\Phi}^{iT}(x)\underset{\sim}{\Phi}^j(x)dx \quad (x = x, y; i, j = 0, 1, 2) \qquad (2.8.26)$$

式(2.8.26)见第一章，第1.11节中的公式. 荷载列阵为

$$\underset{\sim}{\bar{P}} = \iint_\Omega q(x,y)\underset{\sim}{\Phi}^T(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}^T(y)dxdy \qquad (2.8.27)$$

$$\underset{\sim}{\bar{M}}_x = \iint_\Omega m_x\underset{\sim}{\Phi}^T(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}^T(y)dxdy \qquad (2.8.28)$$

$$\underset{\sim}{\bar{M}}_y = \iint_\Omega m_y\underset{\sim}{\Phi}^T(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}^T(y)dxdy \qquad (2.8.29)$$

2.8.3 数值算例

根据上面提出的计算公式，编制了计算程序，若干数值算例在VAX－11/780超级小型计算机上实施了计算，计算结果详见下列各表.

表 2-25　四边简支厚板板心的挠度值，板承受均布荷载

$\frac{t}{L}$	网格	样条有限元法 $\frac{W_c Et^3}{qL^4}, k_\tau=5/6$	[82]	有限元解[13]
0.01		0.04450	0.04439	0.04438
0.02	8×8	0.0447	—	—
0.05		0.04649	—	—
0.10		0.05037	0.04632	0.04628
0.20		0.06290	0.05217	0.05202

表 2-26　四边固支厚板板心挠度值，板承受均布荷载($\mu=0.3$)

$\frac{t}{L}$	网格	样条有限元法	
		$W_c D_b/qL^4$	M_c/qL^2
0.01		0.001269	0.02301
0.02	8×8	0.001275	0.02286
0.05		0.001329	0.02302
0.10		0.001513	0.2330
0.20		0.002204	0.02391
[43]		0.00126532	0.0229051

表 2-27　四边简支厚板，板心承受集中荷载，板心挠度值($\mu=0.3$)

$\frac{t}{L}$	网格	样条有限元法 $W_c D_b/PL^2, k_\tau=5/6$	有限元解
0.01		0.01127	0.01170
0.02	8×8	0.01149	—
0.05		0.01210	0.01219
0.10		0.01353	0.01353
0.20		0.01815	0.01801

表 2-28 四边简支方板，承受均布荷载与集中荷载时，板心挠度与弯矩的收敛情况($\mu=0.3, k_\tau=5/6$)

t/L	网格	均布荷载 W_cD_b/qL^4	均布荷载 M/qL^2	集中荷载 WD_b/pL^2
0.01	4×4	0.00404107	0.04833188	0.01028034
	6×6	0.00408372	0.04895766	0.01093146
	8×8	0.00407449	0.04803950	0.01126989
0.02	4×4	0.00410165	0.04931442	0.01067353
	6×6	0.00410024	0.04847669	0.01123339
	8×8	0.00410232	0.04813090	0.01148685
0.05	4×4	0.00422292	0.04932239	0.01143630
	6×6	0.00423986	0.04913591	0.01188542
	8×8	0.00425771	0.04908513	0.01209482
0.10	4×4	0.00456354	0.05002678	0.01278116
	6×6	0.00460126	0.05099391	0.01328439
	8×8	0.00461627	0.05081454	0.01353102
0.20	4×4	0.00560048	0.05312306	0.01675381
	6×6	0.00567162	0.05450966	0.01775895
	8×8	0.00575885	0.05514734	0.01815516

表 2-29 四边固支方板、承受均布荷载与集中荷载时，板心挠度值与弯矩值的收敛情况($\mu=0.3, k_\tau=5/6$)

t/L	网格	均布荷载 W_cD_b/qL^4	均布荷载 M_c/qL^2	集中荷载 W_cD_b/PL^2
0.01	4×4	0.00118303	0.02426349	0.00423481
	6×6	0.00128179	0.02488966	0.00499046
	8×8	0.00126869	0.02300789	0.00527053
0.02	4×4	0.00128843	0.02580594	0.00474239
	6×6	0.00128091	0.02355717	0.00521562
	8×8	0.00127505	0.02285827	0.00543567
0.05	4×4	0.00134607	0.02469923	0.00532795
	6×6	0.00132884	0.02307256	0.00566055
	8×8	0.00132856	0.02301476	0.00583085
0.10	4×4	0.00151910	0.02402018	0.00630681
	6×6	0.00151281	0.02331564	0.00669363
	8×8	0.00151285	0.02329729	0.00691285
0.20	4×4	0.00220575	0.02424926	0.00957075
	6×6	0.00220394	0.02392894	0.01041185
	8×8	0.00220389	0.02390840	0.01099025

2.9 样条混合有限元法解中厚度矩形板的弯曲

2.9.1 厚板的二类变量广义变分原理

在齐次边界条件下，中厚度板的二类变量广义势能泛函定义为

$$\Pi_{2p}=\int_{\Omega}\underset{\sim}{M}^{T}\underset{\sim}{\chi}\,d\Omega+\int_{\Omega}\underset{\sim}{Q}^{T}\underset{\sim}{\gamma}\,d\Omega-\int_{\Omega}\frac{1}{2}\underset{\sim}{M}^{T}\underset{\sim}{D}_{b}^{-1}\underset{\sim}{M}\,d\Omega$$

$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\underset{\sim}{Q}^{T}\underset{\sim}{C}_{b}^{-1}\underset{\sim}{Q}\,d\Omega-\int_{\Omega}\underset{\sim}{\Delta}^{T}\underset{\sim}{P}\,d\Omega \tag{2.9.1}$$

式中

$$\underset{\sim}{\chi}=-\underset{\sim}{\overline{D}}^{T}\underset{\sim}{\Delta},\quad \underset{\sim}{\gamma}=-\underset{\sim}{\overline{E}}^{T}\underset{\sim}{\Delta} \tag{2.9.2}$$

关于广义位移与广义力的变分，二类变量广义势能泛函数的驻值，有下列方程

$$\delta\Pi_{2p}=\underset{\sim}{0}$$

$$\int_{\Omega}\delta\underset{\sim}{M}^{T}(\underset{\sim}{\overline{D}}^{T}\underset{\sim}{\Delta}+\underset{\sim}{D}_{b}^{-1}\underset{\sim}{M})d\Omega+\int_{\Omega}\delta\underset{\sim}{Q}^{T}(\underset{\sim}{\overline{E}}^{T}\underset{\sim}{\Delta}+\underset{\sim}{C}_{b}^{-1}\underset{\sim}{Q})d\Omega$$

$$+\int_{\Omega}\underset{\sim}{M}^{T}\underset{\sim}{\overline{D}}^{T}\delta\underset{\sim}{\Delta}\,d\Omega+\int_{\Omega}\underset{\sim}{Q}^{T}\underset{\sim}{\overline{E}}^{T}\delta\underset{\sim}{\Delta}\,d\Omega-\int_{\Omega}\delta\underset{\sim}{\Delta}\,\underset{\sim}{P}^{T}d\Omega=\underset{\sim}{0}$$

对简支矩形厚板，积分上式的第三、四项，并利用板的边界条件，考虑到各变分 $\delta\underset{\sim}{\Delta}$，$\delta\underset{\sim}{M}$，$\delta\underset{\sim}{Q}$均为彼此独立的不等于零的任意微小量，所以，我们得欧拉方程为

$$-\underset{\sim}{\overline{D}}^{T}\underset{\sim}{\Delta}=\underset{\sim}{D}_{b}^{-1}\underset{\sim}{M}=\underset{\sim}{\chi}$$

$$-\underset{\sim}{\overline{E}}^{T}\underset{\sim}{\Delta}=\underset{\sim}{C}_{b}^{-1}\underset{\sim}{Q}=\underset{\sim}{\gamma} \tag{2.9.3}$$

$$\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{D}_{b}\underset{\sim}{\overline{D}}^{T}\underset{\sim}{\Delta}+\underset{\sim}{\overline{E}}\,\underset{\sim}{C}_{b}\underset{\sim}{\overline{E}}^{T}\underset{\sim}{\Delta}=\underset{\sim}{P} \tag{2.9.4}$$

亦即

$$(D_{b}\underset{\sim}{\overline{B}}_{d}^{T}+\underset{\sim}{C}_{b}\underset{\sim}{\overline{C}}_{d}^{T})\underset{\sim}{\Delta}=\underset{\sim}{P} \tag{2.9.5}$$

其中

$$\underset{\sim}{\chi}=[-\theta_{x,x}-\theta_{y,y}-(\theta_{x,y}+\theta_{y,x})]^{T} \tag{2.9.6}$$

$$\underset{\sim}{\gamma} = [(-w_{,x} + \theta_x)(-w_{,y} + \theta_y)]^T \tag{2.9.7}$$

2.9.2 样条混合有限元法方程组

下面应用乘积型样条插值函数来构造二类场函数.

$$\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{\Psi}_1(x,y)\underset{\sim}{W}_1 \tag{2.9.8}$$

式中

$$\underset{\sim}{W}_1 = [\underset{\sim}{A}^1\underset{\sim}{B}^1\underset{\sim}{C}^1]^T \tag{2.9.9}$$

$$\underset{\sim}{Q} = \underset{\sim}{\Psi}_2(x,y)\underset{\sim}{W}_2 \tag{2.9.10}$$

式中

$$\underset{\sim}{W}_2 = [\underset{\sim}{A}^2\underset{\sim}{B}^2\underset{\sim}{C}^2]^T \tag{2.9.11}$$

$$\underset{\sim}{\Delta} = \underset{\sim}{\Psi}_1(x,y)\underset{\sim}{W}_3 \tag{2.9.12}$$

式中

$$\underset{\sim}{W}_3 = [\underset{\sim}{A}^3\underset{\sim}{B}^3\underset{\sim}{C}^3]^T \tag{2.9.13}$$

$$\underset{\sim}{\Psi}_1(x,y) = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) & & \underset{\sim}{0} \\ & \underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) & \\ \underset{\sim}{0} & & \underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) \end{bmatrix} \tag{2.9.14}$$

$$\underset{\sim}{\Psi}_2(x,y) = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) \end{bmatrix} \tag{2.9.15}$$

在上述各式中,$\underset{\sim}{A}^i\underset{\sim}{B}^i\underset{\sim}{C}^i$ $(i=1,2,3)$均为待定常数,其中

$$\underset{\sim}{\Phi}(x) = [\Phi_{-1}(x)\ \Phi_0(x)\ \Phi_1(x)\ \cdots\Phi_N(x)\ \Phi_{N+1}(x)]\ (x = x,y) \tag{2.9.16}$$

上式中的$\Phi_{-1}(x),\Phi_0(x),\cdots,\Phi_{N+1}(x)$详见第一章式(1.11.1).

将式(2.9.8)至式(2.9.16)代入(2.9.1),根据厚板的二类变量广义势能原理,得样条混合有限元方程组

$$
\begin{bmatrix} \underset{\sim}{F} & \underset{\sim}{H} \\ \underset{\sim}{H}^T & \underset{\sim}{K}_E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{q} \\ \underset{\sim}{W}_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{P} \end{Bmatrix} \tag{2.9.17}
$$

式中

$$
\underset{\sim}{F}=
\begin{bmatrix}
\frac{1}{D_b(1-\mu^2)}\underset{\sim}{A}_x^{00}\otimes\underset{\sim}{A}_y^{00} & \frac{\mu}{D_b(1-\mu^2)}\underset{\sim}{A}_x^{00}\otimes\underset{\sim}{A}_y^{00} & & & \underset{\sim}{0} \\
 & \frac{-1}{D_b(1-\mu^2)}\underset{\sim}{A}_x^{00}\otimes\underset{\sim}{A}_y^{00} & & & \\
 & & \frac{-2}{D_b(1-\mu^2)}\underset{\sim}{A}_x^{00}\otimes\underset{\sim}{A}_y^{00} & & \\
 & & & \frac{-\underset{\sim}{A}_x^{00}\otimes\underset{\sim}{A}_y^{00}}{C} & \\
 \text{对称} & & & & \frac{-\underset{\sim}{A}_x^{00}\otimes\underset{\sim}{A}_y^{00}}{C}
\end{bmatrix} \tag{2.9.18}
$$

$$
\underset{\sim}{H}=
\begin{bmatrix}
\underset{\sim}{0} & -\underset{\sim}{A}_x^{01}\otimes\underset{\sim}{A}_y^{10} & \underset{\sim}{0} \\
\underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & -\underset{\sim}{A}_x^{00}\otimes\underset{\sim}{A}_y^{01} \\
\underset{\sim}{0} & -\underset{\sim}{A}_x^{00}\otimes\underset{\sim}{A}_y^{01} & -\underset{\sim}{A}_x^{01}\otimes\underset{\sim}{A}_y^{00} \\
\underset{\sim}{A}_x^{01}\otimes\underset{\sim}{A}_y^{00} & -\underset{\sim}{A}_x^{00}\otimes\underset{\sim}{A}_y^{00} & \underset{\sim}{0} \\
\underset{\sim}{A}_x^{10}\otimes\underset{\sim}{A}_y^{01} & \underset{\sim}{0} & -\underset{\sim}{A}_x^{00}\otimes\underset{\sim}{A}_y^{00}
\end{bmatrix} \tag{2.9.19}
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{q} &= [\underset{\sim}{A}^1\underset{\sim}{B}^1\underset{\sim}{C}^1\underset{\sim}{A}^2\underset{\sim}{B}^2]^T \\
\underset{\sim}{A}^1 &= [\underset{\sim}{a}_{-1}^1\underset{\sim}{a}_0^1\underset{\sim}{a}_1^1\cdots\underset{\sim}{a}_i^1\cdots\underset{\sim}{a}_N^1\underset{\sim}{a}_{N+1}^1] \\
\underset{\sim}{a}_i^1 &= [a_{-1i}^1a_{0i}^1a_{1i}^1\cdots a_{Ni}^1a_{N+1i}^1]
\end{aligned} \tag{2.9.20}
$$

其中

$$
C=\frac{5(1-\mu)S^2D_b}{L^2},\quad S=\frac{L}{t} \tag{2.9.21}
$$

$$
\underset{\sim}{K_E} = \begin{bmatrix} k_e \underset{\sim}{A_x^{00}} \otimes \underset{\sim}{A_y^{00}} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \tag{2.9.22}
$$

$\underset{\sim}{K_E}$ 为弹性地基刚阵，k_e 为弹性地基常数.

根据上面推导出的各种算式，编制了 VAX－11/780 超级小型计算机程序，计算了若干数值算例，计算结果详见下列各表.

表 2-30　四边简支厚板承受均布荷载，板心挠度（$\mu=0.3$）

t/L	网格	样条混合有限元法 $k_\tau=5/6$ $w_{max}Et^3/qL^4$	解析法	有限元法 $k_\tau=0.6$	杂交元法 [82]
0.01		0.04443	0.04439	0.04423	0.04422
0.02		0.04460	—	—	—
0.05	8×8	0.04566	0.04486	0.04469	0.04487
0.10		0.04855	0.04632	0.04612	0.04669
0.20		0.05723	0.05217	0.005186	0.05255

表 2-31　四边简支方厚板，板心承受集中荷载，板心挠度值

t/L	网格	样条混合有限元法	有限元法	杂交元法[82]
		$w_{max}D_b/pL^2$，$k_\tau=5/6$	$k_\tau=0.6$	
0.01		0.01185	0.01170	0.01142
0.02		0.0119	—	—
0.05	8×8	0.01230	0.01219	0.01169
0.10		0.01349	0.01353	0.01247
0.20		0.01775	0.01801	0.01533

表 2-32　四边固支方厚板承受均布荷载，板心挠度与弯矩值($k_r=5/6$)

t/L	网格	$w_{max}D_b/qL^4$	M_{max}/qL^2
0.01	8×8	0.001251	0.02109
0.02		0.001261	0.02133
0.05		0.001313	0.02170
0.10		0.001484	0.02206
0.20		0.002131	0.02270
[25]		0.00126532	0.229051
[43]		0.00126319	0.22905

表 2-33　四边简支中厚板承受均布荷载时，板中心挠度与弯矩值收敛情况

$\frac{L}{t}$	网格	w	M_x	M_y
5.0	4×4	0.523190	0.5070351	0.5070348
	6×6	0.524087	0.5091504	0.5091505
10.0	4×4	0.441982	0.4912573	0.4912560
	6×6	0.444114	0.4940598	0.4940585
20	4×4	0.416274	0.4827672	0.4827680
	6×6	0.418147	0.4847956	0.4847946
50	4×4	0.407729	0.4792774	0.4792636
	6×6	0.408440	0.4799705	0.4799907
100	4×4	0.406420	0.4788140	0.4787797
	6×6	0.406827	0.4789641	0.4790225
薄板解[25]		0.406	0.479	0.479
因子		$10^{-2}\frac{qL^4}{D_b}$	$10^{-1}qL^2$	$10^{-1}qL^2$

表 2-34　四边简支中厚板心承受集中荷载时板心挠度与弯矩值和收敛情况

$\frac{L}{t}$	网格	W	M_x	M_y
5.0	4×4	0.1667675	0.25146431	0.25146398
	6×6	0.1774439	0.30564862	0.30564877
10.0	4×4	0.1308251	0.24672315	0.24672283
	6×6	0.1349158	0.30058026	0.30057967
20.0	4×4	0.1206532	0.24397103	0.24397087
	6×6	0.1229604	0.29704443	0.29704398
50.0	4×4	0.1175098	0.24278483	0.24278204
	6×6	0.1190746	0.29507631	0.29508200
100.0	4×4	0.1170423	0.24362528	0.24262205
	6×6	0.1184669	0.29467803	0.29469526
因子		$10^{-1}\frac{pL^2}{D_b}$	P	P

表 2-35　四边固支中厚板承受均布荷载时的板心挠度与弯矩值

$S=\frac{L}{t}$	网格	w	M_x	M_y
5.0	6×6	0.00213081	0.02269593	0.02269592
10.0	6×6	0.00148375	0.02206368	0.02206366
20.0	6×6	0.00131246	0.02169894	0.02169891
50.0	6×6	0.00126066	0.02132627	0.02132637
100.0	6×6	0.00125143	0.02109125	0.02109156
[25]		0.00126	0.0229	0.0229
因子		qL^4/D_b	qL^2	qL^2

2.10　样条混合有限元法解梁的弯曲

根据第一章第五节内容，对梁的弯曲问题，二类变量广义势能泛函为

$$\Pi_{2b} = \int_L -M\frac{d^2w}{dx^2}dx - \int_L \frac{M^2dx}{2EI}dx - \int_L qwdx \quad (2.10.1)$$

现应用三次 B 样条函数来构造两类场函数，它们是

$$M = \underset{\sim}{\Phi}(x)\underset{\sim}{A} \quad (2.10.2)$$

$$w = \underset{\sim}{\Phi}(x)\underset{\sim}{B} \quad (2.10.3)$$

式中，样条函数 $\Phi(x)=[\underset{\sim}{\Phi}_{-1}\Phi_0\ \underset{\sim}{\Phi}_1\cdots\underset{\sim}{\Phi}_N\ \underset{\sim}{\Phi}_{N+1}]$，详见第一章 1.11 节.

将式(2.10.2)与(2.10.3)代入式(2.10.1)有

$$\Pi_{2b} = -\int_0^L \underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi}''\underset{\sim}{B}\,dx - \int_0^L \frac{1}{2EI}\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi}\ \underset{\sim}{A}\,dx - \int_0^L \underset{\sim}{B}^T\underset{\sim}{\Phi}^T q dx$$

$$= -\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}_x^{02}\underset{\sim}{B} - \frac{1}{2EI}\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}_x^{00}\underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{B}^T\underset{\sim}{P} \quad (2.10.4)$$

根据二类变量广义变分原理，有

$$\frac{\partial\Pi_{2b}}{\partial\underset{\sim}{A}} = \underset{\sim}{0},\ \frac{\partial\Pi_{2b}}{\partial\underset{\sim}{B}} = \underset{\sim}{0}$$

即

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\underset{\sim}{A}_x^{00}}{EI} & -\underset{\sim}{A}_x^{02} \\ -\underset{\sim}{A}_x^{02T} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{A} \\ \underset{\sim}{B} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{O} \\ \underset{\sim}{P} \end{Bmatrix} \quad (2.10.5)$$

式中

$$\underset{\sim}{A}_x^{ij} = \int_0^L \underset{\sim}{\Phi}^{iT}\underset{\sim}{\Phi}^j dx \qquad (i,j=0,1,2) \quad (2.10.6)$$

式中(2.10.6)具体表达详见第一章十一节中各式.

$$\underset{\sim}{P} = \int_0^L \underset{\sim}{\Phi}^T q dx \quad (2.10.7)$$

根据上面各算式，编制了计算程序. 下面给出简支梁与固支梁的算例. 其计算结果列表 2-37.

表 2-36　简支梁受均布荷载时梁中点处的挠度与弯矩值

网格	EIw/qL^4	M/qL^2
4	0.01302	0.13021
8	0.01302	0.12630
12	0.01302	0.12558
16	0.01302	0.12532
[精确解]	0.01302	0.12500

表 2-37　固支梁中点承受集中荷载时梁中央处挠度与弯矩值

网格	EIw/PL^3	M/PL
4	C.00521	0.125
10	0.00521	0.125
16	0.00521	0.125
[精确解]	0.0052083	0.125

2.11　样条混合有限元法解梁的振动与稳定问题

上节介绍了样条混合有限元法在梁弯曲中的应用，由数值计算结果表明，对位移与弯矩，其精度均较高. 本节将样条混合有限元法推广应用于梁振动与稳定问题.

对梁的振动与稳定问题，其二类变量广义势能泛函数为

$$\Pi_{2b} = \int_0^L M^T \chi dx - \int_0^L \frac{M^T M dx}{2EI} dx - \int_0^L \frac{1}{2} \lambda \bar{m} w^T w dx - \int_0^L \frac{1}{2} N (\frac{dw}{dx})^T (\frac{dw}{dx}) dx \tag{2.11.1}$$

式中

$$\chi = -\frac{d^2 w}{dx^2} \tag{2.11.2}$$

λ 为振动特征值,$\bar{m}$ 为梁的密度.

设二类变量场函数分别为

$$M = \underset{\sim}{\Phi}\underset{\sim}{A}, w = \underset{\sim}{\Phi}\underset{\sim}{B} \tag{2.11.3}$$

将式(2.11.3)代入式(2.11.1),得

$$\Pi_{2b} = \frac{1}{2}\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}^{02}\underset{\sim}{B} - \frac{1}{2EI}\underset{\sim}{A}^T\underset{\sim}{A}^{00}\underset{\sim}{A} - \frac{1}{2}\lambda\bar{m}\underset{\sim}{B}^T\underset{\sim}{A}^{00}\underset{\sim}{B} - \frac{1}{N}\underset{\sim}{B}^T\underset{\sim}{A}^{11}\underset{\sim}{B} \tag{2.11.4}$$

式中

$$\underset{\sim}{A}^{02} = \int_0^L \underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi}'' dx, \quad \underset{\sim}{A}^{00} = \int_0^L \underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi}\, dx, \quad \underset{\sim}{A}^{11} = \int_0^L \underset{\sim}{\Phi}'^T\underset{\sim}{\Phi}' dx \tag{2.11.5}$$

式(2.11.5)具体式子详见第一章第十一节. 根据二类变量广义势能原理

$$\frac{\partial \Pi_{2b}}{\partial \underset{\sim}{A}} = \underset{\sim}{0}, \frac{\partial \Pi_{2b}}{\partial \underset{\sim}{B}} = \underset{\sim}{0}$$

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\underset{\sim}{A}^{00}}{EI} & -\underset{\sim}{A}^{00} \\ -\underset{\sim}{A}^{00T} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{A} \\ \underset{\sim}{B} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \lambda\underset{\sim}{M}_\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{A} \\ \underset{\sim}{B} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{K}_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{A} \\ \underset{\sim}{B} \end{Bmatrix} \tag{2.11.6}$$

式中,$\underset{\sim}{M}_\lambda$ 与 $\underset{\sim}{K}_G$ 分别为质量矩阵与几何刚度矩阵.

$$\underset{\sim}{M}_\lambda = \bar{m}\underset{\sim}{A}^{00} \tag{2.11.7}$$

$$\underset{\sim}{K}_G = N\underset{\sim}{A}^{11} \tag{2.11.8}$$

对于梁的振动问题,从式(2.11.6)消去 A 即得振动模态方程

$$(\underset{\sim}{A}^{02T} EI \underset{\sim}{A}^{00^{-1}} \cdot \underset{\sim}{A}^{02} - \lambda\underset{\sim}{M}_\lambda)\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{0} \tag{2.11.9}$$

其振动特征方程为

$$|\widetilde{K}-\lambda M_{\lambda}|=0 \tag{2.11.10}$$

式中

$$\widetilde{K}=A^{02^T}A^{30^{-1}}A^{02} \tag{2.11.11}$$

对于梁的轴向稳定问题，其特征方程为

$$|\widetilde{K}-K_G|=0 \tag{2.11.12}$$

下面通过样条混合有限元法程序，给出两个数值算例的结果见下表.

表 2-38 梁最低自振频率系数 α^*

网格	简支梁	固支梁
4	9.87239	22.41015
6	9.87012	22.37982
8	9.86949	22.37546
[精确解]	9.870	22.37

注：自振频率公式 $\omega_{\min}=\frac{\alpha^*}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$

表 2-39 梁最小临界荷载系数 β^*

网格	简支梁	固支梁
4	9.87523	40.00000
6	9.87066	39.56047
8	9.86985	39.60213
[精确解]	9.870	39.480

注：临界荷载公式 $P_{\min}=\beta^*\frac{EI}{L^2}$

2.12 样条混合有限元法解弹性地基梁

本节将样条混合有限元法推广应用于弹性地基梁的弯曲、振动与稳定问题.

弹性地基梁的二类变量广义势能泛函表达式为

$$\Pi_{2bi} = \int_0^L -M\frac{d^2w}{dx^2}dx - \int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx + \frac{k_c}{2}\int_0^L w^2dx$$

$$-\int_0^L \frac{1}{2}\lambda \bar{m} w^2 dx - \int_0^L \frac{1}{2}N\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx - \int_0^L qwdx \quad (2.12.1)$$

将两类场函数式(2.10.2)与(2.10.3)代入上式，根据二类变量广义势能原理，弹性地基梁的样条混合有限元方程为

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\underset{\sim}{A}^{00}}{EI} & -\underset{\sim}{A}^{02} \\ -\underset{\sim}{A}^{02T} & k_c\underset{\sim}{A}^{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{A} \\ \underset{\sim}{B} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{O} \\ \underset{\sim}{P} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \underset{\sim}{0} \\ 0 & \lambda \underset{\sim}{M}_\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{A} \\ \underset{\sim}{B} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ 0 & \underset{\sim}{K}_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{A} \\ \underset{\sim}{B} \end{Bmatrix}$$

(2.12.2)

对于弯曲问题

$$\underset{\sim}{\widetilde{K}}\,\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{P} \quad (2.12.3)$$

式中

$$\underset{\sim}{A} = -\underset{\sim}{A}^{00^{-1}} EI \underset{\sim}{A}^{02} \underset{\sim}{B} \quad (2.12.4)$$

$$\widetilde{K} = k_c \underset{\sim}{A}^{00} + \underset{\sim}{A}^{02T}[\underset{\sim}{A}^{00}]^{-1}\underset{\sim}{A}^{02} EI \quad (2.12.5)$$

对振动问题，由式(2.12.2)得到振动特征方程

$$|\underset{\sim}{\widetilde{K}} - \lambda \underset{\sim}{M}_\lambda| = 0 \quad (2.12.6)$$

对于稳定性问题，由式(2.12.2)得到稳定特征方程

$$|\underset{\sim}{\widetilde{K}} - \underset{\sim}{K}_G| = 0 \quad (2.12.7)$$

下面通过计算程序，给出若干数值算例的计算结果.

表 2-40 弹性地基梁中央处的挠度与弯矩值 $k_e=1000\frac{EI}{L^4}$

方法	网格	简支梁			
	N	均布荷载		集中荷载	
		w	M	w	M
样条混合有限元法	4	0.116	0.7002	0.2084	5.1708
	6	0.116	0.7693	0.2093	5.7796
	8	0.116	0.7808	0.20494	5.9911
	12	0.116	0.7899	0.2095	6.1440
[30]		0.116	0.7966		
因子		$10^{-2}\frac{qL^4}{EI}$	$10^{-2}qL^2$	$10^{-2}\frac{pL^3}{EI}$	$10^{-2}pL$

方法	网格	固支梁			
		均布荷载		集中荷载	
	N	W	M	M	W
样条混合有限元法	4	0.8504	1.2397	0.1834	5.6796
	4	0.8498	1.2172	0.1840	6.6205
	8	0.8497	1.2033	0.1841	6.6393
	12	0.8497	1.1930	0.1841	6.5273
[30]		0.8479	1.1840		
因子		$10^{-2}\frac{qL^4}{EI}$	$10^{-2}qL^2$	$10^{-2}\frac{PL^3}{EI}$	$10^{-2}PL$

表 2-41 弹性地基梁自振频率系数 α^*， $k_e=1000\frac{EI}{L^4}$

方法	网格	简支梁	固支梁
样条混合有限元法	4	33.1280	38.7584
	6	33.1274	38.7409
	8	33.1272	38.7382
[30]		33.1273	38.7376

$$\omega_{\min}=\frac{\alpha^*}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\bar{m}}}$$

表 2-42　弹性地基梁临界荷载系数 β^*，　$k_e=1000\frac{EI}{L^4}$

网格	简支梁	固支梁
4	65.1413	106.5208
6	64.8097	101.6586
8	64.8089	101.2738
[30]	64.8131	101.2405

$P_{\min}=\beta^*\frac{EI}{L^2}$

2.13　样条混合有限元法解厚梁问题

梁的二类变量广义势能泛函定义为

$$\Pi_{2b}(w,\theta,M)=-\int_0^L M\left(\frac{d\theta}{dx}\right)dx+\frac{k_r GA}{2}\int_0^L\left(\frac{dw}{dx}-\theta\right)^2dx-\int_0^L\frac{M^2}{2EI}dx-\int_0^L qw\,dx \tag{2.13.1}$$

设场函数分别为

$$w=\Phi\underset{\sim}{A},\quad \theta=\Phi\underset{\sim}{B},\quad M=\Phi\underset{\sim}{C} \tag{2.13.2}$$

将式(2.13.2)代入式(2.13.1)后，根据二类变量广义变分原理，有

$$\begin{bmatrix} k_\gamma GAA^{11} & -k_\gamma GA\underset{\sim}{A}^{12} & \underset{\sim}{0} \\ -k_\gamma GA\underset{\sim}{A}^{12T} & k_\gamma G\underset{\sim}{A}^{00} & -\underset{\sim}{A}^{10T} \\ \underset{\sim}{0} & -\underset{\sim}{A}^{10} & -\frac{\underset{\sim}{A}^{00}}{EI} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{A}\\ \underset{\sim}{B}\\ \underset{\sim}{C}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}P\\ \underset{\sim}{0}\\ \underset{\sim}{0}\end{Bmatrix} \tag{2.13.3}$$

式中，$A^{ij}(i,j=0,1,2)$均为已知矩阵，详见第一章. P 是已知荷载列阵，

k_τ 为截面形状系数. 对矩形截面，$k_\tau=\dfrac{5}{6}$，G 为剪切模量，A 为梁截面面积，EI 为梁的弯曲刚度. $\bar{C}=k_\tau Gt$ 为剪切刚度系数.

对于厚梁的振动与稳定问题，其泛函为

$$
\Pi_{2b}(w,\theta)=\int_0^L\left\{\frac{EI}{2}\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2+\frac{\bar{C}}{2}\left(\frac{dw}{dx}-\theta\right)^2\right\}dx
$$

$$
-\frac{1}{2}\int_0^L\lambda\bar{m}Aw^2dx-\frac{1}{2}\int_0^L\lambda\bar{m}J\theta^2dx-\frac{1}{2}\int_0^L N\left(\frac{dw}{dx}\right)^2dx
\tag{2.13.4}
$$

将式(2.13.2)中的 w 与 θ 代入上式(2.13.4)，根据变分原理得下列方程

$$
\begin{bmatrix}-\bar{C}\underset{\sim}{A}^{11} & -\bar{C}\underset{\sim}{A}^{10}\\ -\bar{C}\underset{\sim}{A}^{10T} & EI\underset{\sim}{A}^{11}+\bar{C}\underset{\sim}{A}^{00}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{A}\\ \underset{\sim}{B}\end{Bmatrix}
=\begin{bmatrix}\lambda\underset{\sim}{M}_\lambda & \underset{\sim}{0}\\ \underset{\sim}{0} & \lambda\underset{\sim}{\widetilde{M}}_\lambda\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{A}\\ \underset{\sim}{B}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\underset{\sim}{K}_G & \underset{\sim}{0}\\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{A}\\ \underset{\sim}{B}\end{Bmatrix}
\tag{2.13.5}
$$

式中

$$
\underset{\sim}{M}_\lambda=\bar{m}A\underset{\sim}{A}^{00},\quad \underset{\sim}{\widetilde{M}}_\lambda=\bar{m}J\underset{\sim}{A}^{00},\quad \underset{\sim}{K}_G=N\underset{\sim}{A}^{11}
\tag{2.13.6}
$$

在式(2.13.6)中，$\underset{\sim}{M}_\lambda$ 为厚梁的质量矩阵，$\underset{\sim}{\widetilde{M}}_\lambda$ 为梁的振动惯量矩阵，$\underset{\sim}{K}_G$ 为几何刚度矩阵，$\bar{m}$ 为梁的密度，EI 为梁的弯曲刚度.

对于厚梁的振动问题，若不计转动惯性的影响. 其振动特征方程为

$$
|\underset{\sim}{\widetilde{K}}-\lambda\underset{\sim}{M}_\lambda|=0
\tag{2.13.7}
$$

式中

$$
\underset{\sim}{\widetilde{K}}=-\bar{C}\underset{\sim}{A}^{11}-\bar{C}\underset{\sim}{A}^{10}(EI\underset{\sim}{A}^{11}+\bar{C}\underset{\sim}{A}^{00})^{-1}\underset{\sim}{A}^{10T}
\tag{2.13.8}
$$

对于厚梁的稳定问题，其稳定特征方程为

$$
|\underset{\sim}{\widetilde{K}}-\underset{\sim}{K}_G|=0
\tag{2.13.9}
$$

根据上述各式，可计算厚梁的自振频率和临界荷载. 下面给出若干算例的数值结果.

表 2-43　厚梁弯曲的中点挠度与弯矩值

$\frac{L}{t}$	网格 N	简支厚梁			
		集中荷载		均布荷载	
	.	wEI/pL^3	M/pL	wEI/qL^4	M/qL^2
5	4	0.02246	0.21928	0.01393	0.12497
	12	0.02233	0.23742	0.01375	0.12367
	24	0.02248	0.24372	0.01384	0.12431
10	4	0.02115	0.21666	0.01325	0.12488
	12	0.02033	0.23171	0.01262	0.12004
	24	0.02079	0.24083	0.1292	0.12241
20	4	0.02072	0.21086	0.01306	0.12453
	12	0.01774	0.21298	0.01096	0.10807
	24	0.01915	0.23027	0.01189	0.11546
	[30]	0.02083	0.25	0.01302	0.125

$\frac{L}{t}$	网格 N	固支厚梁			
		集中荷载		均布荷载	
		wEI/pL^3	M/pL	wEI/qL^4	M/qL^2
5	4	0.00684	0.09428	0.00351	0.04164
	12	0.00694	0.11435	0.00350	0.04160
	24	0.00699	0.11973	0.00351	0.04166
10	4	0.00553	0.09166	0.00283	0.04154
	12	0.00562	0.11393	0.00281	0.04149
	24	0.00565	0.11968	0.00283	0.04164
20	4	0.00509	0.08587	0.00264	0.04120
	12	0.00520	0.11252	0.00259	0.04101
	24	0.00530	0.11944	0.00265	0.04156
	[30]	0.005208	0.125	0.002604	0.041667

表 2-44　厚梁自振频率系数

$\frac{L}{t}$	网格	简支厚梁 α^*		
5	4	9.40236	33.60076	67.69731
	12	9.45857	33.53801	65.62998
	22	9.42990	33.51699	65.61507
10	4	9.74741	37.94280	86.87859
	12	9.98506	37.82622	80.45063
	22	9.86586	37.73199	80.38238
15	4	9.81870	39.24419	96.38783
	12	10.34618	39.10626	85.04998
	22	10.11010	38.89874	84.89335
20	4	9.84380	39.99718	103.529576
	12	10.76082	39.87123	87.14976
	22	10.35077	39.49449	86.86379
	[30]	9.870		

$\frac{L}{t}$	网格	固支厚梁 α^*		
5	4	18.98725	45.10784	79.23767
	12	18.99335	44.75043	75.80151
	22	18.97915	44.73100	75.77893
10	4	21.38150	57.05058	116.63698
	12	21.41541	55.70746	102.14932
	22	21.35176	55.61323	102.04491
15	4	21.98678	66.58764	142.62074
	12	22.06178	59.00285	111.51450
	22	21.92560	58.78259	111.26853
20	4	22.25360	64.58630	117.37679
	12	22.39951	60.48077	115.73822
	22	22.15478	60.08327	115.29345
	[30]	22.37		

表 2-45 简支厚梁临界荷载系数

$\frac{L}{t}$	5		
网格 N	4	12	20
β^*	9.21443	9.32945	9.27754
[30]	9.870		
$\frac{L}{t}$	10		
网格 N	4	12	20
β^*	9.70276	10.18450	9.96726
[30]	9.870		
$\frac{L}{t}$	20		
网格 N	4	12	20
β^*	9.84846	11.75368	10.90404
[30]	9.870		

第三章　基于三类变量广义变分原理的多变量样条有限元法

70 年代中期，基于变分原理的有限元法得到了迅速发展，在此基础上，提出了应用样条插值函数来构造位移场函数，发展为样条有限元法. 国外，恩脱斯(H. Antes)[49]于 1974 年提出了应用截断式三次样条函数构造位移场函数，求解了薄板的弯曲问题. 国内，石钟慈[51]于 1979 年提出了应用三次 B 样条函数来构造位移场函数，建立了样条有限元模型，并在薄板弯曲问题上得到了应用. 米错若屋(T. Mizusawa)[50]于 1979 年应用截断式三次样条函数求解斜板的振动与屈曲问题. 以后，在文献[51]的影响下，国内不少学者在样条有限元法方面展开了广泛的研究. 我们应用双三次、双五次样条插值函数推广应用于加助板壳的弯曲、振动、稳定及动力响应等问题上[60－63]. 近几年，我们提出了应用乘积型二元三次 B 样条函数构造二类场函数，应用二类变量广义变分原理，建立了多变量样条有限元模型，并在板壳的弯曲、振动与稳定问题上得到了应用[64,67]，这些内容在第二章中已作了详细介绍.

三类变量广义变分原理提出至今已有 40 多年了，但是，还未曾有人应用该原理建立多变量有限元模型来求解三类场变量问题. 在文献[72,73]中，我们首次提出应用胡-鹫津原理与样条插值函数建立薄板多变量样条有限元模型以求解三类场变量问题. 由于样条函数具有解析与数值的双重特性，连续性强和逼近精度高等优点，再由于独立设置三类场函数，所以，对各类场变量均有较好的计算精度. 由于工程与物理等问题，其数学模型大多可归结为偏微分方程的边初值问题，若能找到其相应的广义变分原理，则亦可应用多变量样条有限元法直接求解多类场变量问题，因此该方法有重要的理论与实际意义.

本节将详细介绍基于三类变量广义变分原理的多变量样条有限元法及其在矩形薄板问题中的应用.

3.1 薄板的三类变量广义变分原理

在有限元法发展过程中，变分原理已为建立各种有限元位移、应力、杂交和混合有限元模型[32-36]，提供了牢固的理论基础. 近几年来，应用放松连续条件的胡-鹫津三变量广义变分原理建立了广义杂交元模型[40]，但在他们的列式中，只求得了二类场变量，即位移与应力. 文献[72]提出了基于胡-鹫津三类变量广义变分原理的多变量样条有限元法，直接求出了三类场变量值. 本节应用三类变量广义变分原理建立广义变分法，能直接求解三类场变量值. 为此，下面先讨论薄板的三类变量广义变分原理.

对于薄板弯曲问题，其三类变量广义变分原理的一种形式是求下列三类变量泛函驻值，即

$$\delta \Pi_{3P} = 0 \tag{3.1.1}$$

式中

$$\begin{aligned}\Pi_{3p} = & \iint_{\Omega} \left(- M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) dx dy \\ & + \iint_{\Omega} (U - qw) dx dy + \iint_{\Omega} - (M_x k_x + M_y k_y + 2M_{xy} k_{xy}) dx dy \\ & - \int_{c_1 + c_2} \left(\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + Qn\right)(w - \bar{w}) ds + \int_{c_1} Mn\left(\frac{\partial w}{\partial n} - \bar{\theta}_n\right) ds \\ & + \int_{c_2 + c_3} \overline{M}n \frac{\partial w}{\partial n} ds - \int_{c_3} \bar{q} w ds \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

式中

Π_{3p}—— 薄板弯曲的三类变量的泛函

C_1—— 固支边，$w = \bar{w}, \dfrac{\partial w}{\partial n} = \bar{\theta}_n$

C_2—— 简支边，$w = \bar{w}, Mn = \overline{M}n$

C_3—— 自由边，$Mn = \overline{M}n, \dfrac{\partial M_{ns}}{\partial s} + Qn = \bar{q}$ (3.1.3)

$$U = \frac{1}{2}\underset{\sim}{k}^T \underset{\sim}{D}_b \underset{\sim}{k} \text{ —— 弯曲应变能} \tag{3.1.4}$$

$$\underset{\sim}{k} = [-k_x \quad -k_y \quad -2k_{xy}]^T \text{—— 弯曲应变} \tag{3.1.5}$$

$\underset{\sim}{D}_b$,D_b 详细见第二章式(2.1.5).

对于齐次简支边界条件下,薄板弯曲的三类变量泛函表达式定义为

$$\Pi_{3p} = \iint_\Omega \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{\chi}\, dxdy + \iint_\Omega \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{k}\, dxdy + \iint_\Omega (U - qw) dxdy \tag{3.1.6}$$

式中

$$\underset{\sim}{M} = [M_x \quad M_y \quad M_{xy}]^T \tag{3.1.7}$$

$$\underset{\sim}{\chi} = [-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}]^T \tag{3.1.8}$$

对式(3.1.6)关于内力矩,广义应变和位移取驻值,即

$$\delta \Pi_{3p} = \underset{\sim}{0}$$

得

$$\iint_\Omega (\delta \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{\chi} + \delta \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{k}) dxdy + \iint_\Omega (\underset{\sim}{M}^T \delta \underset{\sim}{k} + \delta \underset{\sim}{k}^T \underset{\sim}{D}_b \underset{\sim}{k}) dxdy + \iint_\Omega (\underset{\sim}{M}^T \delta \underset{\sim}{\chi} - q\delta w) dxdy = \underset{\sim}{0} \tag{3.1.9}$$

对式(3.1.9)中的第五项进行二次分部积分并利用简支边界条件后,得

$$\iint_\Omega (\underset{\sim}{M}^T \delta \underset{\sim}{\chi}\, dxdy = \iint_\Omega (\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y}) \delta w dxdy \tag{3.1.10}$$

将式(3.1.10)代入(3.1.9),由于变分 δw,$\delta \underset{\sim}{M}$,$\delta \underset{\sim}{k}$在板域内均不为零的任意微小值,所以由式(3.1.9)得到板的几何、物理与平衡方程如下:

几何方程

$$\underset{\sim}{\chi} + \underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{0} \qquad \text{在板域内} \tag{3.1.11}$$

$$w = \bar{w} = 0 \qquad 在板域边界上 \qquad (3.1.12)$$

物理方程

$$\underset{\sim}{M} + \underset{\sim}{D_b}\underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{0} \qquad 在板域内 \qquad (3.1.13)$$

平衡方程

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 My}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 Mxy}{\partial x \partial y} = q \qquad 在板域边界内 \qquad (3.1.14)$$

$$Mx = My = \bar{M} = 0 \qquad 在板域边界上 \qquad (3.1.15)$$

将式(3.1.11)和式(3.1.13)代入式(3.1.14)得薄板弯曲控制方程为

$$D_b\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = q(x,y) \qquad (3.1.16)$$

薄板弯曲的边值问题等价其三类变量泛函关于广义内力矩、广义应变和位移变分的问题，对于薄板弯曲、振动与稳定问题在齐次边界条件下，它的三类变量泛函定义[75]为

$$\begin{aligned} \Pi_{3p}(w,\underset{\sim}{k},\underset{\sim}{M}) = & \iint_\Omega (\underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{\chi}) dxdy + \iint_\Omega \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{k}\, dxdy \\ & + \iint_\Omega \left(\frac{1}{2}\underset{\sim}{k}^T \underset{\sim}{D_b}\underset{\sim}{k} - qw\right) dxdy \\ & - \frac{1}{2}\iint_\Omega (\omega^2 \bar{m} w^2) dxdy - \frac{1}{2}\iint_\Omega (\underset{\sim}{\bar{Q}}^T \underset{\sim}{N}\, \underset{\sim}{\bar{Q}}) dxdy \end{aligned} \qquad (3.1.17)$$

式中，ω 为板的自振频率，$\bar{m}$ 为质量密度，$\underset{\sim}{N}$ 为板的中面力.

$$\underset{\sim}{\bar{Q}} = \left[\frac{\partial w}{\partial x}\ \frac{\partial w}{\partial y}\right]^T \qquad (3.1.18)$$

$$\underset{\sim}{N} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{yx} & N_y \end{bmatrix} \qquad (3.1.19)$$

3.2 三类变量广义变分法解薄板弯曲、振动与稳定问题

本节应用三类变量广义变分原理来建立广义变分法，以薄板的弯

曲、振动与稳定问题为例，构造多变量场函数，导出广义变分法的计算格式，并通过若干算例来说明其计算步骤. 根据式(3.1.17)，其中有三类独立场变量，它们是位移w，内力矩$\underset{\sim}{M}$与广义应变$\underset{\sim}{k}$. 现设置三类独立场变量函数分别为

$$w=\underset{\sim}{N}_w\underset{\sim}{a},\quad \underset{\sim}{M}=\underset{\sim}{N}_\sigma\underset{\sim}{B},\quad \underset{\sim}{k}=\underset{\sim}{N}_\varepsilon\underset{\sim}{C} \tag{3.2.1}$$

其中

$$\underset{\sim}{N}_\sigma=\begin{bmatrix}\varphi_1(x,y) & & 0\\ & \varphi_2(x,y) & \\ 0 & & \varphi_3(x,y)\end{bmatrix} \tag{3.2.2}$$

$$\underset{\sim}{N}_\varepsilon=\begin{bmatrix}\Phi_1(x,y) & & 0\\ & \Phi_2(x,y) & \\ 0 & & \Phi_3(x,y)\end{bmatrix} \tag{3.2.3}$$

$\underset{\sim}{a},\underset{\sim}{B},\underset{\sim}{C}$均为待定常数，对于$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3$和$\underset{\sim}{N}_w,\underset{\sim}{N}_\sigma,\underset{\sim}{N}_\varepsilon$的选择是根据内力矩，广义应变与位移的板域内与边界的平衡和位移条件来构造，它们都是坐标的连续函数.

现将式(3.2.1)—(3.2.3)代入式(3.1.17)，根据胡-鹫津三类变量广义变分原理，对薄板的弯曲问题，有

$$\frac{\partial \Pi_3 p}{\partial \underset{\sim}{a}}=\underset{\sim}{0},\frac{\partial \Pi_3 p}{\partial \underset{\sim}{B}}=\underset{\sim}{0},\frac{\partial \Pi_3 p}{\partial \underset{\sim}{C}}=\underset{\sim}{0}$$

$$\begin{bmatrix}\underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{K}_{\sigma w}^T & \underset{\sim}{0}\\ \underset{\sim}{K}_{\sigma w} & \underset{\sim}{0} & -\underset{\sim}{K}_{\sigma\varepsilon}\\ \underset{\sim}{0} & -\underset{\sim}{K}_{\sigma\varepsilon}^T & \underset{\sim}{K}_\varepsilon\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{a}\\ \underset{\sim}{B}\\ \underset{\sim}{C}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{\bar{P}}\\ \underset{\sim}{0}\\ \underset{\sim}{0}\end{Bmatrix} \tag{3.2.4}$$

其中

$$\underset{\sim}{K}_{\sigma w}=\iint_\Omega \underset{\sim}{N}_\sigma^T\underset{\sim}{\bar{B}}\,\underset{\sim}{N}_w dxdy \tag{3.2.5}$$

$$\underset{\sim}{K}_{\sigma\epsilon}=\iint_{\Omega}\underset{\sim}{N}_{\sigma}^{T}\underset{\sim}{N}_{\epsilon}dxdy \tag{3.2.6}$$

$$\underset{\sim}{K}_{\epsilon}=\iint_{\Omega}\underset{\sim}{N}_{\epsilon}^{T}\underset{\sim}{D}_{b}\underset{\sim}{N}_{\epsilon}dxdy \tag{3.2.7}$$

$$\underset{\sim}{\overline{P}}=\iint_{\Omega}\underset{\sim}{N}_{w}^{T}q\,dxdy \tag{3.2.8}$$

对于薄板的振动与稳定问题，则有

$$\begin{bmatrix}\underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{H}^{T}\\ \underset{\sim}{H} & \underset{\sim}{K}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a\\ R\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega^{2}\underset{\sim}{M}_{\lambda} & \underset{\sim}{0}\\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{a}\\ \underset{\sim}{R}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\underset{\sim}{K}_{G} & \underset{\sim}{0}\\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{a}\\ \underset{\sim}{R}\end{Bmatrix} \tag{3.2.9}$$

$$\underset{\sim}{H}=[\underset{\sim}{K}_{\sigma w}^{T}\quad \underset{\sim}{0}^{T}]^{T} \tag{3.2.10}$$

$$\underset{\sim}{K}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{0} & -\underset{\sim}{K}_{\sigma\epsilon}\\ -\underset{\sim}{K}_{\sigma\epsilon}^{T} & \underset{\sim}{K}_{\epsilon}\end{bmatrix} \tag{3.2.11}$$

$$\underset{\sim}{R}=[\underset{\sim}{B}^{T}\quad \underset{\sim}{C}^{T}]^{T} \tag{3.2.12}$$

由式(3.2.9)分别得到薄板振动与稳定特征方程为

$$|-\underset{\sim}{H}^{T}\underset{\sim}{K}^{-1}\underset{\sim}{H}-\omega^{2}\underset{\sim}{M}_{\lambda}|=0 \tag{3.2.13}$$

$$|-\underset{\sim}{H}^{T}\underset{\sim}{K}^{-1}\underset{\sim}{H}-\underset{\sim}{K}_{G}|=0 \tag{3.2.14}$$

式中

$$\underset{\sim}{M}_{\lambda}=\iint_{\Omega}\overline{m}\,\underset{\sim}{N}_{w}^{T}\underset{\sim}{N}_{w}dxdy \tag{3.2.15}$$

$$\underset{\sim}{K}_{G}=\iint_{\Omega}\underset{\sim}{\overline{Q}}^{T}\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{\overline{Q}}\,dxdy$$

$$\underset{\sim}{\overline{Q}}=\left[\frac{\partial \underset{\sim}{N}_{w}}{\partial x}\quad \frac{\partial \underset{\sim}{N}_{w}}{\partial y}\right]^{T} \tag{3.2.16}$$

$\underset{\sim}{M}_{\lambda}$ 为板的质量矩阵，$\underset{\sim}{K}_{G}$ 为板的几何刚度矩阵.

3.3 数值算例

根据上节导出的基于三类变量广义变分原理的广义变分法的计算式子，对薄板弯曲、振动与稳定问题作具体计算.

3.3.1 四边简支薄板弯曲计算

设场函数分别为

$$\underset{\sim}{M}=\underset{\sim}{N}_{\sigma}(x,y)\underset{\sim}{B},\quad \underset{\sim}{k}=\underset{\sim}{N}_{\varepsilon}(x,y)\underset{\sim}{C},\quad w=N_{w}a$$

式中

$$\underset{\sim}{N}_{\sigma}(x,y)=\begin{bmatrix}\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L} & & 0\\ & \sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L} & \\ 0 & & \cos\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi y}{L}\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{N}_{\varepsilon}(x,y)=\begin{bmatrix}\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L} & & 0\\ & \sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L} & \\ 0 & & 2\cos\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi y}{L}\end{bmatrix}$$

$$N_{w}=\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L}$$

$$\underset{\sim}{B}=[b_1\quad b_2\quad b_3]^T\quad \underset{\sim}{C}=[c_1\quad c_2\quad c_3]^T$$

由式(3.2.5)—(3.2.8)，有

$$\underset{\sim}{K}_{\varepsilon}=\iint_{\Omega}\underset{\sim}{N}_{\varepsilon}^{T}\underset{\sim}{D}_{b}\underset{\sim}{N}_{\varepsilon}dxdy=D_{b}\begin{bmatrix}\frac{L^2}{4} & \mu\frac{L^2}{4} & 0\\ \mu\frac{L^2}{4} & \frac{L^2}{4} & 0\\ 0 & 0 & \frac{(1-\mu)}{2}L^2\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{K}_{\sigma w} = \iint_{\Omega} \underset{\sim}{N}_{\sigma}^{T} \underset{\sim}{\overline{B}}\, \underset{\sim}{N}_{w} dxdy = [\frac{\pi^2}{4}\ \frac{\pi^2}{4}\ -\frac{\pi^2}{2}]^T$$

$$\underset{\sim}{K}_{\sigma\varepsilon} = \iint_{\Omega} \underset{\sim}{N}_{\sigma}^{T} \underset{\sim}{N}_{\varepsilon} dxdy = \begin{bmatrix} \frac{L^2}{4} & & 0 \\ & \frac{L^2}{4} & \\ 0 & & -\frac{L^2}{2} \end{bmatrix}$$

对于分布荷载情况

$$q = q_0 \sin\frac{\pi x}{L} \sin\frac{\pi y}{L}$$

$$\underset{\sim}{\overline{P}} = \iint_{\Omega} N_w^T q dxdy = \frac{q_0 L^2}{4}$$

对于均布荷载情况

$$q = q_0$$

$$\underset{\sim}{\overline{P}} = \iint_{\Omega} N_w^T q dxdy = \frac{4 q_0 L^2}{\pi^2}$$

对于均布荷载情况，由上面各式形成系统方程组为

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 0 & \frac{\pi^2}{4} & \frac{\pi^2}{4} & -\frac{\pi^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\pi^2}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{4} & 0 & 0 \\ \frac{\pi^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{4} & 0 \\ -\frac{\pi^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{2} \\ 0 & -\frac{L^2}{4} & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -\frac{L^2}{4} & 0 & \multicolumn{3}{c}{D_b \begin{bmatrix} \frac{L^2}{4} & \mu\frac{L^2}{4} & 0 \\ \mu\frac{L^2}{4} & \frac{L^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\mu)}{2}L^2 \end{bmatrix}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{2} & & & \end{array}\right] \cdot \begin{Bmatrix} a \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

$$
=\begin{Bmatrix} \frac{4q_0L^2}{\pi^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

由上式述方程组解出三类场变量值并列表 3-1.

表 3-1　四边简支矩形薄板弯曲的三类场变量解答

	$w_{中}$	$M_{x中}=M_{y中}$	$M_{xy角}$	$k_{x中}=k_{y中}$	$k_{xy角}$
均布荷载 $q=q_0$	$\frac{4q_0L^4}{D_b\pi^6}$	$(1+\mu)\frac{4q_0L^2}{\pi^4}$	$-(1-\mu)*\frac{4q_0L^2}{\pi^4}$	$\frac{4q_0L^2}{D_b\pi^4}$	$\frac{4q_0L^2}{D_b\pi^4}$
分布荷载 $q=q_0\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L}$	$\frac{q_0L^4}{4D_b\pi^4}$	$(1+\mu)\frac{q_0L^2}{4\pi^2}$	$-(1-\mu)*\frac{q_0L^2}{4\pi^2}$	$\frac{q_0L^2}{4D_b\pi^2}$	$\frac{q_0L^2}{4D_b\pi^2}$

3.3.2　四边简支薄板的最低自振频率的计算

先计算 $\underset{\sim}{H}^T\underset{\sim}{K}^{-1}\underset{\sim}{H}$之值，见下式，由式(3.2.15)计算板的质量矩阵

$$
\underset{\sim}{M}_\lambda=\int_0^L\int_0^L \bar{m}N_w^TN_w dxdy=\bar{m}\frac{L^2}{4}
$$

于是由式(3.2.13)可算得板的最低自振频率为

$$
\omega=\frac{2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{D_b}{m}}=\frac{19.7379}{L^2}\sqrt{\frac{D_b}{m}}\quad（精确解\frac{19.74}{L^2}\sqrt{\frac{D_b}{\bar{m}}}）
$$

3.3.3　四边简支薄板的单向最小临界荷载

根据式(3.2.10)，(3.2.11)计算出 $\underset{\sim}{H}^T\underset{\sim}{K}^{-1}\underset{\sim}{H}$之值如下：

$$
\underset{\sim}{H}^{T}\underset{\sim}{K}^{-1}\underset{\sim}{H}=\left[\frac{\pi^2}{4}\ \frac{\pi^2}{4}\ -\frac{\pi^2}{2}\ 0\quad 0\quad 0\right]
$$

$$
\times\left[\begin{array}{ccc|c}
 & & & \begin{array}{ccc} -\dfrac{L^2}{4} & & \underset{\sim}{0} \\ & -\dfrac{L^2}{4} & \\ \underset{\sim}{0} & & \dfrac{L^2}{2}\end{array} \\
 & \underset{\sim}{0} & & \\
 & & & \\
-\dfrac{L^2}{4} & & \underset{\sim}{0} & \\
 & -\dfrac{L^2}{4} & & D_0\begin{bmatrix}\dfrac{L^2}{4} & \mu\dfrac{L^2}{4} & 0 \\ \mu\dfrac{L^2}{4} & \dfrac{L^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1-\mu)L^2}{2}\end{bmatrix} \\
\underset{\sim}{0} & & \dfrac{L^2}{2} &
\end{array}\right]^{-1}
\begin{bmatrix}\dfrac{\pi^2}{4} \\ \dfrac{\pi^2}{4} \\ -\dfrac{\pi^2}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{-D_0\pi^4}{L^2}
$$

由式(3.3.16)先计算板的几何刚度矩阵

$$
\underset{\sim}{K}_G=\iint_{\Omega}\underset{\sim}{\bar{Q}}^{T}\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{\bar{Q}}\,dxdy=\iint_{\Omega}N_x\cos^2\frac{\pi x}{L}\sin^2\frac{\pi x}{L}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2dxdy=\frac{\pi^2}{4}N_x
$$

再由式(3.2.14)求得板的最小临界荷载值为

$$
N_x=\frac{4\pi^2D_b}{L^2}=39.4784\,\frac{D_b}{L^2}\qquad\left(\text{精确解 } 39.48\,\frac{D_b}{L^2}\right)
$$

3.4 广义变分法解弹性地基板问题

对于文克尔弹性地基板的弯曲、振动与稳定的三类变量泛函数，在齐次边界条件下定义为

$$\Pi_{3p}(w,\underset{\sim}{M},\underset{\sim}{k}) = \iint_{\Omega} \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{\chi}\, dxdy + \iint_{\Omega} \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{k}\, dxdy$$

$$+ \iint_{\Omega} (\frac{1}{2} \underset{\sim}{k}^T \underset{\sim}{D}_b \underset{\sim}{k} - qw) dxdy + \frac{k_e}{2} \iint_{\Omega} w^2 dxdy$$

$$- \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \omega^2 \bar{m} w^2 dxdy - \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \underset{\sim}{\bar{Q}}^T \underset{\sim}{N}\, \underset{\sim}{\bar{Q}}\, dxdy \qquad (3.4.1)$$

式中，k_e 为文克尔弹性地基板的地基系数，由实验确定.

根据薄板弯曲的三类变量广义变分原理得系统方程组为

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{K}_E & \underset{\sim}{K}_{\sigma w}^T & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{K}_{\sigma w} & \underset{\sim}{0} & -\underset{\sim}{K}_{\sigma \varepsilon} \\ \underset{\sim}{0} & -\underset{\sim}{K}_{\sigma \varepsilon}^T & \underset{\sim}{K}_{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{a} \\ \underset{\sim}{B} \\ \underset{\sim}{C} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\bar{P}} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \end{Bmatrix} \qquad (3.4.2)$$

式中

$$\underset{\sim}{K}_E = k_e \underset{\sim}{K}_w, \qquad k_e = \bar{k} \frac{D_b}{L^4} \qquad (3.4.3)$$

对于文克尔弹性地基板的振动与稳定问题，由三类变量广义变分原理，有

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{K}_E & \underset{\sim}{H}^T \\ \underset{\sim}{H} & \underset{\sim}{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{a} \\ \underset{\sim}{R} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 \underset{\sim}{M}_\lambda & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{a} \\ \underset{\sim}{R} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{K}_G & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{a} \\ \underset{\sim}{R} \end{Bmatrix} \qquad (3.4.4)$$

其中，$\underset{\sim}{K}$，$\underset{\sim}{H}$与式(3.2.10)，(3.2.11)相同.

由式(3.4.4)分别可得弹性地基板的振动与稳定问题的特征方程为

$$|-\underset{\sim}{H}^T \underset{\sim}{K}^{-1} \underset{\sim}{H} + \underset{\sim}{K}_E - \omega^2 \underset{\sim}{M}_\lambda| = 0 \qquad (3.4.5)$$

$$|-\underset{\sim}{H}^T \underset{\sim}{K}^{-1} \underset{\sim}{H} + \underset{\sim}{K}_E - \underset{\sim}{K}_G| = 0 \qquad (3.4.6)$$

对于四边简支弹性地基薄板弯曲问题的解答是由方程(3.4.2)求得. 计算结果列于表 3.2.

表 3-2　四边简支弹性地基板弯曲的三类变量的解答

	$W_{中}$	$M_{x中}$	$M_{xy角}$
均布荷载 $q=q_0$	$\dfrac{4q_0L^4}{D_b\pi^2(\pi^4+\frac{\bar{k}}{4})}$	$\dfrac{4q_0L^2}{(\pi^4+\frac{\bar{k}}{4})}(1+\mu)$	$\dfrac{4q_0L^2}{(\pi^4+\frac{\bar{k}}{4})}(1-\mu)$
分布荷载 $q=q_0\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L}$	$\dfrac{q_0L^4}{4D_b(\pi^4+\frac{\bar{k}}{4})}$	$\dfrac{\pi^2q_0L^2}{4(\pi^2+\frac{\bar{k}}{4})}(1+\mu)$	$\dfrac{\pi^2q_0L^2}{4(\pi^4+\frac{\bar{k}}{4})}(1-\mu)$

	$k_{x中}$	$k_{xy角}$
均布荷载 $q=q_0$	$\dfrac{4q_0L^2}{D_b(\pi^4+\frac{\bar{k}}{4})}$	$\dfrac{4q_0L^2}{D_b(\pi^4+\frac{\bar{k}}{4})}$
分布荷载 $q=q_0\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{\pi y}{L}$	$\dfrac{\pi^2q_0L^2}{4D_b(\pi^4+\frac{\bar{k}}{4})}$	$\dfrac{\pi^2q_0L^2}{4D_b(\pi^4+\frac{\bar{k}}{4})}$

对于四边简支弹性地基板的最低自振频率与单向最小临界荷载可分别由式(3.4.5)及式(3.4.6)求得如下

$$\omega=\frac{2}{L^2}\left[\frac{D_b(\pi^4+\frac{\bar{k}}{4})}{\bar{m}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

若 $\bar{k}=0$

$$\omega=\frac{2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{D_b}{\bar{m}}}\qquad（与精确解相同）$$

则

$$N_x=\frac{D_b}{L^2}(4\pi^2+\frac{\bar{k}}{\pi^2})$$

若 $\bar{k}=0$

则

$$N_x=4\pi^2\frac{D_b}{L^2}\qquad（与精确解相同）$$

3.5 三类变量样条有限元法分析矩形薄板的弯曲

对于矩形薄板的弯曲问题，在齐次边界条件下，其三类变量广义泛函为

$$\Pi_{3p}=\iint_{\Omega}\underset{\sim}{M}^{T}\underset{\sim}{\chi}\,dxdy+\iint_{\Omega}\underset{\sim}{M}^{T}\underset{\sim}{k}\,dxdy+\iint_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\underset{\sim}{k}^{T}\underset{\sim}{D}_{b}\underset{\sim}{k}-qw\right)dxdy \tag{3.5.1}$$

下面，应用乘积型二元三次 B 样条插值函数来构造矩形薄板三类变量场函数如下

$$\underset{\sim}{M}=\underset{\sim}{\Psi}_{1}\underset{\sim}{w}_{1},\qquad \underset{\sim}{k}=\underset{\sim}{\Psi}_{2}\underset{\sim}{w}_{2},\qquad w=\underset{\sim}{\Psi}_{3}\underset{\sim}{w}_{3} \tag{3.5.2}$$

$$\underset{\sim}{w}_{1}=[\underset{\sim}{A}^{T}\quad \underset{\sim}{B}^{T}\quad \underset{\sim}{C}^{T}]^{T},\underset{\sim}{w}_{2}=[\underset{\sim}{G}^{T}\quad \underset{\sim}{I}^{T}\quad \underset{\sim}{R}^{T}]^{T} \tag{3.5.3}$$

$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{C}$，$\underset{\sim}{G}$，$\underset{\sim}{I}$，$\underset{\sim}{R}$均为常数行阵，$\underset{\sim}{w}_{1}$，$\underset{\sim}{w}_{2}$，$\underset{\sim}{w}_{3}$ 均是列阵，它们都是待求未知量.

$$\underset{\sim}{A}=[\underset{\sim}{A}_{-1}\ \underset{\sim}{A}_{0}\ \underset{\sim}{A}_{1}\ \cdots\ \underset{\sim}{A}_{N}\ \underset{\sim}{A}_{N+1}] \tag{3.5.4}$$

$$\underset{\sim}{A}_{i}=[a_{-1i}\ a_{0i}\ a_{1i}\ \cdots\ a_{Ni}\ a_{N+1i}] \tag{3.5.5}$$

$$(i=-1,0,1,\cdots,M,M+1)$$

另些常数矩阵和矩阵 $\underset{\sim}{A}$相似，矩阵 $\underset{\sim}{\Psi}_{1}$，$\underset{\sim}{\Psi}_{2}$，$\underset{\sim}{\Psi}_{3}$ 与三次样条函数有关，表达式如下：

$$\underset{\sim}{\Psi}_{1}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) & & \underset{\sim}{0}\\ & \underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) & \\ \underset{\sim}{0} & & \underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y)\end{bmatrix} \tag{3.5.6}$$

$$\underset{\sim}{\Psi}_{2}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) & & \underset{\sim}{0}\\ & \underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) & \\ \underset{\sim}{0} & & 2\underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y)\end{bmatrix} \tag{3.5.7}$$

$$\underset{\sim}{\Psi}_3 = \underset{\sim}{\Phi}(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}(y) \tag{3.5.8}$$

$$\underset{\sim}{\chi} = -\underset{\sim}{\bar{B}}\,\underset{\sim}{\Psi}_3 \underset{\sim}{w}_3 \tag{3.5.9}$$

将式(3.5.2)—(3.5.9)代入式(3.5.1)，由三类变量广义变分原理，有

$$\frac{\partial \Pi_{3p}}{\partial \underset{\sim}{w}_i} = \underset{\sim}{0} \qquad (i = 1,2,3)$$

$$\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{\Delta} = \underset{\sim}{P} \tag{3.5.10}$$

式中

$$\underset{\sim}{K} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \underset{\sim}{E}^T & \underset{\sim}{H} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{F}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \tag{3.5.11}$$

$$\underset{\sim}{\Delta} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{w}_1 \\ \underset{\sim}{w}_2 \\ \underset{\sim}{w}_3 \end{Bmatrix}, \quad \underset{\sim}{P} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{\bar{P}} \end{Bmatrix} \tag{3.5.12}$$

式(3.5.10)称为矩形薄板弯曲问题的多变量样条有限元法方程组，式中

$$\underset{\sim}{E} = -\iint_{\Omega} \underset{\sim}{\Psi}_1^T \underset{\sim}{\Psi}_2 dxdy$$

$$= \begin{bmatrix} -\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & & \underset{\sim}{0} \\ & -\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & \\ \underset{\sim}{0} & & -2\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} \end{bmatrix} \tag{3.5.13}$$

$$\underset{\sim}{F} = \iint_{\Omega} \underset{\sim}{\Psi}_1^T (-\underset{\sim}{\bar{B}}\,\underset{\sim}{\Psi}_3) dxdy$$

$$= [-\underset{\sim}{A}_x^{02} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} - \underset{\sim}{A}_x^{02} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{02} - 2\underset{\sim}{A}_x^{01} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{10}]^T \tag{3.5.14}$$

$$H = \iint_{\Omega} \underset{\sim}{\Psi}_2^T \underset{\sim}{D}_b \underset{\sim}{\Psi}_2 dxdy$$

$$= D_b \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_x^{02} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & \mu \underset{\sim}{A}_x^{02} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & \underset{\sim}{0} \\ \mu \underset{\sim}{A}_x^{02} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & \underset{\sim}{A}_x^{02} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & 2(1-\mu) \underset{\sim}{A}_x^{02} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} \end{bmatrix}$$

(3.5.15)

其中

$$\underset{\sim}{A}_x^{ij} = \int_0^L [\underset{\sim}{\Phi}^i(x)]^T [\underset{\sim}{\Phi}^j(x)] dx \tag{3.5.16}$$

$$(x = x, y; i, j = 0, 1, 2)$$

式(3.5.16)为方阵，它的具体表达式详见第一章. 荷载列阵为

$$\underset{\sim}{\bar{P}} = \iint_{\Omega} q(x,y) \underset{\sim}{\Phi}^T(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}^T(y) dxdy \tag{3.5.17}$$

3.6 数值结果

根据上面多变量样条有限元列式，编制了计算程序，为了验证方法的可靠性和计算精度，若干数值算例在 VAX－11/780 超级小型计算机上实施了计算，由数值结果显示板各点内力矩，广义应变和位移均有较高的精度，并具有快速收敛的性质，与其它数值方法和精确解的结果亦作了比较，精度十分满意.

表 3-3 给出了矩形方板在均布荷载与集中荷载作用下的板挠度、内力矩和广义应变值，剖分网格为 8×8，相应的理论解与有限元法解亦列于表中，以资比较；表 3-4 给出了四边固支板在均布荷载与集中荷载作用下的板心挠度、内力矩和广义应变值，并与精确解和有限元法解亦作了比较；表 3-5，3-6 给出了网格逐步加密时解答的收敛情况，由表中显示，解的收敛性质十分良好.

表 3-3　简支板承受均布荷载与集中荷载时，板心挠度、内力和曲率值

方法	均布荷载		
	w_c	M_{xc}	k_{xc}
本文方法 8 * 8	0.4063	0.4789	0.3684
精确解，有限元解	0.4062	0.4789	
[43]	0.4062	0.4789	
因子	$\frac{qL^4}{D_b}\times10^{-2}$	$qL^2\times10^{-1}$	$\frac{qL^4}{D_b}\times10^{-2}$
方法	集中荷载		
	w_c	M_{xc}	k_{xc}
本文方法 8 * 8	0.1158	0.3023	0.2326
精确解，有限元解	0.1160		
[43]	0.1160		
因子	$\frac{PL^2}{D_b}\times10^{-2}$	P	$\frac{P}{D_b}$

表 3-4　固支板承受均布荷载与集中荷载时，板心挠度、内力矩和曲率值

方法	均布荷载		
	w_c	M_{xc}	k_{xc}
本文方法 8 * 8	0.1265	0.2282	0.1756
精确解，有限元解	0.1265	0.2291	
[43]	0.1265	0.2291	
因子	$\frac{qL^4}{D_b}\times10^{-2}$	$qL^2\times10^{-1}$	$\frac{qL^2}{D_b}\times10^{-1}$
方法	集中荷载		
	w_c	M_{xc}	k_{xc}
本文方法 8 * 8	0.5593	0.2486	0.1912
精确解，有限元解	0.5612		
[43]	0.5610		
因子	$\frac{PL^2}{D_b}\times10^{-2}$	P	$\frac{P}{D_b}$

表 3-5　简支板在均布荷载作用下，板心的挠度、内力矩及曲率值的网格加密的情况

网格	w_c	M_{xc}	M_{yc}	M_{xyc}
4×4	0.406229	0.4783811	0.4783823	0.127087$E-07$
6×6	0.406251	0.4787850	0.4787837	0.150664$E-07$
8×8	0.406247	0.7488568	0.4788543	−0.16694$E-07$
因子	$\frac{qL^4}{D_b}\times10^{-2}$	$qL^2\times10^{-1}$		

网格	k_{xc}	k_{yc}	k_{xyc}
4×4	0.3679859	0.3679863	0.277974$E-07$
6×6	0.3682965	0.3682949	0.964630$E-07$
8×8	0.3683492	0.3683503	−0.77730$E-07$
因子	$\frac{qL^2}{D_b}\times10^{-1}$		

表 3-6　固支板在均布荷载作用下，板心的挠度、内力矩及曲率值的网格加密的情况

网格	w_c	M_{xc}	M_{yc}	M_{xyc}
4×4	0.126283	0.2097540	0.2097539	0.853712$E-09$
6×6	0.126390	0.2319848	0.2319853	−0.117062$E-08$
8×8	0.126541	0.2282165	0.2282150	−0.103852$E-07$
因子	$\frac{qL^4}{D_b}\times10^{-2}$	$qL^2\times10^{-1}$		

网格	k_{xc}	k_{yc}	k_{xyc}
4×4	0.1613493	0.1613493	0.444965$E-08$
6×6	0.1784498	0.1784500	0.115122$e-07$
8×8	0.1755499	0.1705498	−0.15195$E-07$
因子	$\frac{qL^2}{D_b}\times10^{-1}$		

表 3-7　四边简支板在集中荷载作用下，板心挠度，内力矩及广义应变值的网格加密下的变化情况

网格	w_c	M_{xc}	M_{yc}	M_{xyc}
4×4	0.114747E−01	0.233226E+00	0.233229E+00	0.365311E−06
6×6	0.115591E−01	0.272292E+00	0.272289E+00	0.142027E−06
8×8	0.115770E−01	0.302319E+00	0.3022308E+00	0.604661E−06
因子	$\frac{pL^2}{D_b}$	P		

网格	k_{xc}	k_{yc}	k_{xyc}
4×4	0.179402E+00	0.179406E+00	0.268221E−06
6×6	0.209448E+00	0.209444E+00	0.722473E−06
8×8	0.232600E+00	0.232593E+00	0.111084E−05
因子	$\frac{P}{D_b}$	$\frac{P}{D_b}$	$\frac{P}{D_b}$

表 3-8　四边固支板承受集中荷载作用时，板心挠度、内力矩及广义应变值的网格加密下的变化情况

网格	w_c	M_{xc}	M_{yc}	M_{xyc}
4×4	0.546221E−02	0.174560E+00	0.174564E+00	0.242144E−06
6×6	0.556749E−02	0.219426E+00	0.219425E+00	0.35623E−07
8×8	0.559303E−02	0.248544E+00	0.248536E+00	0.276836E−06
因子	$\frac{pL^2}{D_b}$	P	P	P

网格	k_{xc}	k_{yc}	k_{xyc}
4×4	0.134275E+00	0.134280E+00	0.108233E−06
6×6	0.168785E+00	0.168784E+00	0.698492E−07
8×8	0.191204E+00	0.191200E+00	0.314554E−06
因子	$\frac{P}{D_b}$	$\frac{P}{D_b}$	$\frac{P}{D_b}$

3.7　多变量样条有限元法分析矩形薄板的振动与稳定问题

对于薄板振动与稳定性问题，在齐次边界条件下，其三类变量广义

泛函定义为

$$\Pi_{3P}=\int_{\Omega}\underset{\sim}{M}^{T}\underset{\sim}{\chi}\,d\Omega+\int_{\Omega}\underset{\sim}{M}^{T}\underset{\sim}{k}\,d\Omega+\int_{\Omega}\frac{1}{2}\underset{\sim}{k}^{T}\underset{\sim}{D}_{b}\underset{\sim}{k}\,d\,\Omega$$
$$-\int_{\Omega}\frac{1}{2}\bar{m}W^{2}d\Omega-\int_{\Omega}\frac{1}{2}\underset{\sim}{\bar{Q}}^{T}\underset{\sim}{N}\,\underset{\sim}{\bar{Q}}\,d\Omega \tag{3.7.1}$$

将式(3.5.2)代入式(3.7.1),并应用三类变量广义变分原理,得

$$\begin{bmatrix}\underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F}\\ \underset{\sim}{E}^{T} & \underset{\sim}{H} & \underset{\sim}{0}\\ \underset{\sim}{F}^{T} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{w}_1\\ \underset{\sim}{w}_2\\ \underset{\sim}{w}_3\end{Bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0}\\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0}\\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \lambda\underset{\sim}{M}_{\lambda}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{w}_1\\ \underset{\sim}{w}_2\\ \underset{\sim}{w}_3\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0}\\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0}\\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{K}_{G}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{w}_1\\ \underset{\sim}{w}_2\\ \underset{\sim}{w}_3\end{Bmatrix} \tag{3.7.2}$$

式中,$\underset{\sim}{M}_{\lambda}$ 和 $\underset{\sim}{K}_{G}$ 分别为板的质量矩阵与几何刚度矩阵.

$$\underset{\sim}{M}_{\lambda}=\bar{m}A_{x}^{00}\otimes A_{y}^{00} \tag{3.7.3}$$

$$\underset{\sim}{K}_{G}=\underset{\sim}{A}_{x}^{11}\otimes\underset{\sim}{A}_{y}^{00}N_{x}+\underset{\sim}{A}_{x}^{01}\otimes\underset{\sim}{A}_{y}^{01}N_{xy}+\underset{\sim}{A}_{x}^{01T}\otimes\underset{\sim}{A}_{y}^{01}N_{yx}+\underset{\sim}{A}_{x}^{01}\otimes\underset{\sim}{A}_{y}^{10}N_{y} \tag{3.7.4}$$

对于矩形薄板的振动问题,由式(3.7.2)得模态方程和特征值方程分别为

$$(-\underset{\sim}{S}^{T}\underset{\sim}{K}^{-1}S-\lambda\underset{\sim}{M}_{\lambda})\underset{\sim}{w}_{3}=\underset{\sim}{0}$$
$$|-S^{T}\underset{\sim}{K}^{-1}S-\lambda\underset{\sim}{M}_{\lambda}|=0 \tag{3.7.5}$$

式中

$$\underset{\sim}{S}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{F}\\ \underset{\sim}{0}\end{bmatrix} \tag{3.7.6}$$

$$\underset{\sim}{K}=\left[\begin{array}{c:c}\underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{E}\\ \hdashline \underset{\sim}{E}^{T} & \underset{\sim}{H}\end{array}\right] \tag{3.7.7}$$

对矩形薄板的稳定性问题，由(3.7.2)分别得稳定模态方程和特征值方程为

$$(-\underset{\sim}{S}^T\underset{\sim}{K}^{-1}\underset{\sim}{S}-\underset{\sim}{K}_G)\underset{\sim}{w}_3=\underset{\sim}{0} \qquad (3.7.8)$$

$$|-\underset{\sim}{S}^T\underset{\sim}{K}^{-1}\underset{\sim}{S}-\underset{\sim}{K}_G|=0$$

下面给出固支矩形薄板自振频率与单向临界荷载值及其收敛情况.

表 3-9 固支矩形薄板的最低自振频率与单向临界荷载值

网格	α^*	β^*
4×4	36.0172	100.7378
6×6	35.9955	99.5336
8×8	36.0457	99.4769
	35.99 [42]	99.39 [26]

$\omega=\alpha^*\cdot\frac{1}{L^2}(\frac{D_b}{mt})^{\frac{1}{2}}, N_{cr}=\beta^*\cdot\frac{D_b}{L^2}$

表 3-10 固支矩形薄板自振频率的收敛情况

网格	α^*				
4×4	36.01724	73.74033	73.74059	108.82498	134.59427
6×6	35.99527	73.43329	73.43329	108.32954	132.00536
8×8	36.04570	73.42986	73.43214	108.27660	131.66151

表 3-11 固支矩形薄板单向临界荷载的收敛情况

网格	β^*				
4×4	100.73775	118.88524	191.66826	256.44043	
6×6	99.53358	115.07135	197.61308	246.52985	262.11133
8×8	99.47687	114.70992	193.03629	245.90921	260.84937

3.8 弹性地基上矩形薄板的弯曲、振动与稳定

对于弹性地基上矩形薄板的弯曲、振动与稳定性问题，在齐次边界条件下，其三类变量广义泛函定义为

$$\Pi_{3pe} = \int_{\Omega} \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{\chi}\, d\Omega + \int_{\Omega} \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{k}\, d\Omega - \int_{\Omega} (\frac{1}{2} \underset{\sim}{k}^T \underset{\sim}{D}_b \underset{\sim}{k} - q\, w) d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{1}{2} k_e w^2 d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \lambda \bar{m} w^2 d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underset{\sim}{\bar{Q}}^T \underset{\sim}{N}\, \underset{\sim}{\bar{Q}}\, d\Omega \qquad (3.8.1)$$

将三类场变量函数式(3.5.2)代入上式(3.8.1),并应用三类变量广义变分原理,得下列方程组

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \underset{\sim}{E}^T & \underset{\sim}{H} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{F}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{K}_E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{w}_1 \\ \underset{\sim}{w}_2 \\ \underset{\sim}{w}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{\bar{P}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \lambda \underset{\sim}{M}_\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{w}_1 \\ \underset{\sim}{w}_2 \\ \underset{\sim}{w}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{K}_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{w}_1 \\ \underset{\sim}{w}_2 \\ \underset{\sim}{w}_3 \end{Bmatrix} \qquad (3.8.2)$$

式(3.8.2)为弹性地基矩形板多变量样条有限元法方程组.式中

$$\underset{\sim}{K}_E = k_e \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00}, k_e = \bar{k} \frac{D}{L^4} \qquad (3.8.3)$$

对于弹性地基矩形板的弯曲问题,其方程组为

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \underset{\sim}{E}^T & \underset{\sim}{H} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{F}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{K}_E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{w}_1 \\ \underset{\sim}{w}_2 \\ \underset{\sim}{w}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{\bar{P}} \end{Bmatrix} \qquad (3.8.4)$$

式中,荷载列阵为

$$\underset{\sim}{\bar{P}} = \int_{\Omega} q(x,y) \underset{\sim}{\Phi}^T(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}^T(y) d\Omega \qquad (3.8.5)$$

对于弹性地基矩形板的振动问题，其振动模态方程与特征值方程分别为

$$(-\underset{\sim}{S}^T\underset{\sim}{K}^{-1}\underset{\sim}{S}+\underset{\sim}{K}_E-\lambda\underset{\sim}{M}_\lambda)\underset{\sim}{w}_s=0 \qquad (3.8.6)$$

$$|-\underset{\sim}{S}^T\underset{\sim}{K}^{-1}\underset{\sim}{S}+\underset{\sim}{K}_E-\lambda\underset{\sim}{M}_\lambda|=0 \qquad (3.8.7)$$

式中，$\underset{\sim}{S}$，$\underset{\sim}{K}$，$\underset{\sim}{K}_E$ 分别由式(3.7.7)，(3.7.8)和(3.8.3)确定.

对弹性地基矩形板的稳定问题，其特征方程为

$$|-\underset{\sim}{S}^T\underset{\sim}{K}^{-1}\underset{\sim}{S}+\underset{\sim}{K}_E-\underset{\sim}{K}_G|=0 \qquad (3.8.8)$$

3.9 若干数值算例的结果

根据上面弹性地基板的多变量样条有限元法方程组，编制了计算程序，若干数值算例在 VAX－11/780 超级小型计算机上实施了计算. 由数值结果显示薄板各点内力矩、广义应变和位移及自振频率与临界荷载值均有较高的精度，并具有快速收敛性质. 其数值结果列于表 3-12.

表 3-12　四边简支弹性地基矩形板在均布荷载作用下，板心处的挠度、内力矩及应变值

网格	k	w	M_x	M_y	M_{xy}
8×8	5	0.4008	0.4716	0.4716	3.327
8×8	100	0.3212	0.3701	0.3701	0.7029
因子		$10^{-2}\frac{qL^4}{D_b}$	$10^{-1}qL^2$	$10^{-1}qL^2$	$10^{-1}qL^2$
网格	k	S_x	S_y	S_{xy}	
8×8	5	0.3630	0.3630	0.5475	
8×8	100	0.2849	0.2849	0.7001	
因子		$10^{-1}\frac{qL^2}{D_b}$	$10^{-1}\frac{qL^2}{D_b}$	$10^{-1}\frac{qL^2}{D_b}$	

表 3-13　四边简支弹性地基矩形板在集中荷载作用下，板心处的挠度、内力矩与应变值

网格	$\bar{k}$	w	M_x	M_y	M_{xy}
4×4		0.544393E−02	0.174177E+00	0.174181E+00	−243774E−06
6×6	5	0.554930E−02	0.219031E+00	0.219030E+00	−437722E−07
8×8		0.557485E−02	0.248151E+00	0.248147E+00	0.266591E−06
4×4		0.512124E−02	0.167398E+00	0.167401E+00	−231434−06
6×6	100	0.522829E−02	0.212039E+00	0.212038E+00	−130618E−06
8×8		0.525410E−02	0.241239E+00	0.241235+00	0.258908E−06
4×4		0.482540E−02	0.161149E+00	0.161152E+00	−218395E−06
6×6	200	0.493400E−02	0.205596E+00	0.205596E+00	0.205595E+00
8×8		0.496010E−02	0.234871E+00	0.234866E+00	0.255679E−06

网格	$\bar{k}$	S_x	S_y	S_{xy}
4×4		0.133980E+00	0.133985E+00	−0.856817E−07
6×6	50	0.168482E+00	0.168480E+00	0.162516E−06
8×8		0.190904E+00	0.190899E+00	0.473578E−06
4×4		0.128765E+00	0.128770E+00	−0.819564E−07
6×6	100	0.163103E+00	0.163102E+00	0.128523E−06
8×8		0.185585E+00	0.185581E+00	0.220025E−06
4×4		0.123958E+00	0.123963E+00	−0.7872311E−07
6×6	200	0.158147E+00	0.158146E+00	0.887085E−07
8×8		0.180685E+00	0.180681E+00	0.540400E−06

表 3-14　四边固支弹性地基矩形板在均布荷载作用下，板心挠度、内力矩和应变值

网格	$\bar{k}$	w	M_x	M_y	M_{xy}
4×4		0.116805E−02	0.190891E−01	0.190893E−01	−0.419095E−07
6×6	100	0.116904E−02	0.212366E−01	0.212363E−01	−0.405271E−07
8×8		0.117037E−02	0.208673E−01	0.208666E−01	0.703731E−07
4×4		0.108597E−02	0.174588E−01	0.174590E−01	−0.435393E−07
6×6	200	0.108696E−02	0.195416E−01	0.195413E−01	−0.203873E−02
8×8		0.108827E−02	0.191868E−01	0.191860E−01	0.649306E−07

网格	$\bar{k}$	S_x	S_y	S_{xy}
4×4		0.146837E−01	0.146841E−01	−0.286382E−07
6×6	100	0.163353E−01	0.163347E−01	0.598084E−07
8×8		0.1605553E−01	0.160549E−01	0.991823E−07
4×4		0.134297E−01	0.134301E−01	−0.325963E−07
6×6	200	0.150314E−1	0.151309E−01	0.483706E−07
8×8		0.147623E−01	0.147619E−01	0.178756E−06

表 3-15　四边固支弹性地基上矩形板的自振频率

网格	$\bar{k}$	α^*			
4×4		36.08656	73.77422	108.84793	134.61285
6×6	5	36.06511	73.46727	108.35265	132.02434
8×8		36.11661	73.46440	108.30002	131.68047
4×4		37.37970	74.41524	109.28348	134.96526
6×6	100	37.35878	74.11079	108.79007	132.38348
8×8		37.40831	74.10760	108.73778	132.04070
4×4		38.69423	75.08418	109.74005	135.33521
6×6	200	38.67407	74.78262	109.24875	132.76070
8×8		38.72234	74.77951	109.19644	132.40922

表 3-16　四边固支弹性地基矩形板单向临界荷载值

网格	$\bar{k}$	β^*			
4×4		101.07829	118.99458	191.8117	256.49829
6×6	5	99.86566	115.17369	197.75406	246.62068
8×8		99.80815	114.81128	193.16788	246.00154
4×4		107.42963	121.07172	194.64912	257.58423
6×6	100	106.06122	117.12109	200.53111	248.35567
8×8		106.00261	116.75041	195.76514	247.73494
4×4		113.84061	123.25812	197.91040	258.71558
6×6	200	112.32414	119.16565	203.66481	250.17116
8×8		112.26602	118.78569	198.70172	249.55119

第四章　基于状态空间理论的多变量数值方法

现代科学技术发展的特点是学科间相互交叉与渗透现象，愈来愈普遍. 本世纪 60 年代，现代控制理论在经典控制论的基础上迅速发展起来. 它可以解决多输入与多输出，线性与非线性，定常与时变等控制系统问题[80]. 由于计算机科学技术的突飞猛进，为用计算机方法解决复杂的控制系统，提供了强有力的计算手段. 传统的弹性结构静动力学的控制方程，其二类变量广义变分原理与经典力学中的二类变量哈密顿原理[7]和现代控制论中的状态空间理论是相通的. 将弹性结构理论的控制方程及其混合变分原理作数学变换，可获得与现代控制论相同的数学模型——状态方程. 近几年来，现代控制论中的状态空间理论逐步应用到其它一些学科中来. 文献[81]应用状态空间理论求解迭层板壳弯曲问题，文献[84]提出了弹性力学混合方程和哈密顿(Hamilton)正则方程，文献[85]研究了分离变量法与哈密顿体系，文献[86,88]提出了弹性力学与结构动力学的状态空间法等. 由于状态空间法可将二维问题化为一维问题，三维问题化为二维问题，使问题的计算规模大幅度降低，特别对于复合材料结构的力学分析，具有未知量少，精度高等优点，因而受到人们的重视与青睐.

本章介绍基于状态空间理论的多变量数值方法. 根据弹性结构的控制方程及其二类变量广义变分原理和正则型哈密顿原理导出状态方程组，应用三角函数、代数插值函数与样条插值函数来构造多变量场函数，建立多变量数值方法的计算格式. 本章给出若干算例的计算结果.

4.1　直角坐标系内弹性平面体的状态方程

在弹性力学中，经典的解析解法有应力法、位移法，还有混合法. 传

统的具体求解方案，将弹性力学控制方程（即高阶偏微分方程组）的未知函数简化为一类未知函数，例如，引入应力函数（艾雷函数），把方程组变换成含有一个未知函数的高阶偏微分方程的边初值问题，然后应用试凑方法（逆解法或半逆解法）来寻求解答，如文献[24]. 而状态空间法的解题思路，是将场变量函数分解为二部分，例如对平面问题，有 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$ 三个应力分量和 u,v 二个位移分量，将其五个量分解为 σ_y，τ_{xy},u,v 一个部分，而 σ_x 为另一个部分. 取应力 (σ_y,τ_{xy}) 与位移 (u,v) 为对偶变量，然后，将高阶偏微分方程组降阶为一阶微分方程组的边初值问题. 这样，对方程组可进行直接积分求解，一次同时可求得多类场变量值，还能扩大解题范围，精度也高.

4.1.1 基于弹性力学平面问题控制方程，建立状态方程

弹性体平面应力问题的控制方程[20]有

平衡方程

$$\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{\sigma}+\underset{\sim}{f}=\underset{\sim}{0} \qquad \text{在域内} \tag{4.1.1}$$

$$\underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{\sigma}=\underset{\sim}{\bar{p}} \qquad \text{在域的面力边界上} \tag{4.1.2}$$

式中，$\underset{\sim}{L}$为偏微分算子，$\underset{\sim}{E}$为方向余弦矩阵，它们分别为

$$\underset{\sim}{L}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{4.1.3}$$

$$\underset{\sim}{E}=\begin{bmatrix} l & 0 & m \\ 0 & m & l \end{bmatrix} \tag{4.1.4}$$

其中，$l=\cos(x,N)$，$m=\cos(y,N)$. 式中，应力向量 $\underset{\sim}{\sigma}$，体力向量 $\underset{\sim}{f}$ 和边界已知面力向量 $\underset{\sim}{\bar{p}}$ 分别为

$$\underset{\sim}{\sigma}=[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T \tag{4.1.5}$$

$$\underset{\sim}{f}=[f_x \quad f_y]^T \tag{4.1.6}$$

$$\underset{\sim}{\bar{p}} = [\bar{p}_x \quad \bar{p}_y]^T \tag{4.1.7}$$

几何方程

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{L}^T \underset{\sim}{u} \qquad \text{在域内} \tag{4.1.8}$$

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{\bar{u}} \qquad \text{在域的位移边界上} \tag{4.1.9}$$

式中，应变分量 $\underset{\sim}{\varepsilon}$ 和位移分量 $\underset{\sim}{u}$ 分别为

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad r_{xy}]^T \tag{4.1.10}$$

$$\underset{\sim}{u} = [u \quad v]^T \tag{4.1.11}$$

物理方程

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{d_e} \underset{\sim}{\varepsilon} \tag{4.1.12}$$

式中，$\underset{\sim}{d_e}$ 为弹性矩阵，d_e 为弹性常数.

$$\underset{\sim}{d_e} = d_e \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{4.1.13}$$

其中

$$d_e = \frac{E}{1-\mu^2}$$

根据平衡方程式(4.1.1)展开式中的第二式有

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - f_y \tag{4.1.14}$$

将几何方程式(4.1.8)代入物理方程式(4.1.12)，得如下方程

$$\sigma_x = d_e\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_y = d_e\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{4.1.15}$$

在式(4.1.15)前二式中，消去 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 项，则得

$$\sigma_x = E\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\sigma_y \tag{4.1.16}$$

再将式(4.1.16)代入平衡方程中的第一展开式，有

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial \sigma_y}{\partial x} - f_x \tag{4.1.17}$$

根据式(4.1.14)，式(4.1.15)的第二、三式，式(4.1.17)得状态方程为

$$\dot{\underset{\sim}{Y}} = \underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{Y} + \underset{\sim}{F} \tag{4.1.18}$$

式中

$$\underset{\sim}{Y} = [u \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \quad v]^T, \dot{\underset{\sim}{Y}} = \frac{\partial \underset{\sim}{Y}}{\partial y} \tag{4.1.19}$$

$$\underset{\sim}{D} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{D}_1 \\ \underset{\sim}{D}_2 & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \tag{4.1.20}$$

其中

$$\underset{\sim}{D}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{2(1+\mu)}{E} & -\dfrac{\partial}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, \underset{\sim}{D}_2 = \begin{bmatrix} -E\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & -\mu\dfrac{\partial}{\partial x} \\ -\mu\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{1-\mu^2}{E} \end{bmatrix} \tag{4.1.21}$$

$$\underset{\sim}{F} = [0 \quad -f_y \quad -f_x \quad 0]^T \tag{4.1.22}$$

其边界条件在位移边界上仍用式(4.1.9)表示. 在应力边界上，用下式表示

$$\begin{aligned} & l(E\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\sigma_y) + m\tau_{xy} = \bar{p}_x \\ & m\sigma_y + l\tau_{xy} = \bar{p}_y \end{aligned} \tag{4.1.23}$$

4.1.2 基于二类变量广义变分原理，建立状态方程

对于弹性力学的二类变量广义变分原理[22]有

$$\delta\Pi_{2p} = \underset{\sim}{0} \tag{4.1.24}$$

$$\Pi_{2p} = \int_{\Omega} \underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{L}^T \underset{\sim}{u}\, d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{2}\underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{d}^{-1} \underset{\sim}{\sigma}\, d\Omega - \int_{\Omega} \underset{\sim}{f}^T \underset{\sim}{u}\, d\Omega$$

$$- \int_{S_u} \underset{\sim}{p}^T(\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{\bar{u}})ds - \int_{S_\sigma} \underset{\sim}{\bar{p}}^T \underset{\sim}{u}\, ds \tag{4.1.25}$$

上式中的应力与位移向量符号详见第一章第一节. 对于弹性体平面应力问题,由式(4.1.24)与式(4.1.25)进行变分与分部积分后,得下式

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_{2p} = & \int_\Omega - (\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x)\delta u d\Omega \\
& + \int_\Omega - (\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y)\delta v d\Omega \\
& + \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\mu}{E}\sigma_y)\delta \sigma_x d\Omega \\
& + \int_\Omega (\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\mu}{E}\sigma_x)\delta \sigma_y d\Omega \\
& + \int_\Omega (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\tau_{xy}}{G})\delta \tau_{xy} d\Omega \\
& + \int_{S_\sigma} (\sigma_x l + \tau_{xy} m - \bar{p}_x)\delta u ds + \int_{S_\sigma} (\tau_{xy} l + \sigma_y m - \bar{p}_y)\delta v ds \\
& - \int_{S_u} (\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{\bar{u}})^T \delta \underset{\sim}{p}\, ds = \underset{\sim}{0}
\end{aligned} \tag{4.1.26}$$

将式(4.1.16)代入上式,消去应力分量 σ_x 后,由变分方程得弹性体平面应力问题状态方程及其边界条件,如式(4.1.18)—(4.1.23).

4.1.3 基于正则空间哈密顿原理[84,96],建立状态方程

哈密顿(Hamilton)原理是经典力学中的重要原理,它是以泛函数(即 Hamilton 作用量)驻值的变分式给出的系统的动力学原理. 本节应用正则型哈密顿原理来推导状态方程.

正则型哈密顿原理表达式

$$\begin{aligned}
\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} [\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H(t, q_1, q_2, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \\
\dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n)] dt = \underset{\sim}{0}
\end{aligned} \tag{4.1.27}$$

式中, I 为作用量泛函, H 为哈密顿函数. 独立的自变函数有二类,即 $p_1, \cdots, p_n$ 与 $q_1, \cdots, q_n$ 共 $2n$ 个,这是二类变量广义泛函,因此,正则型哈

密顿原理也称二类变量广义哈密顿原理，它只取驻值. 正则型哈密顿原理的端点条件为

$$\delta q_i|_{t_0}^{t_1} = 0, \qquad \delta p_i|_{t_0}^{t_1} = 0 \tag{4.1.28}$$

正则型哈密顿的变分方程，即正则方程为

$$\left.\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}\right. \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{4.1.29}$$

式(4.1.29)是根据式(4.1.27)关于 p_i 与 q_i 进行变分，再作分部积分后，并利用端点条件(4.1.28)推导得到的. 下面，应用正则型哈密顿原理来推导状态方程.

由式(4.1.25)，不计体力，将式(4.1.16)代入其中，有新泛函

$$\Pi_{2p}^{*} = \int_{\Omega}\left\{(\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y} + \sigma_y\frac{\partial v}{\partial y}) - H\right\}d\Omega - \int_{S_u}\underset{\sim}{p}^T(\underset{\sim}{u} - \bar{\underset{\sim}{u}})ds - \int_{S_\sigma}\bar{\underset{\sim}{p}}^T\underset{\sim}{u}\,ds \tag{4.1.30}$$

式中，哈密顿函数为

$$H = \frac{1}{2}\left[\frac{\tau_{xy}^2}{G} + \frac{1-\mu^2}{E}\sigma_y^2 - E(\frac{\partial u}{\partial x})^2 - 2\mu\sigma_y\frac{\partial u}{\partial x} - 2\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}\right] \tag{4.1.31}$$

根据哈密顿正则方程(4.1.29)有

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial y}\right]^T = \left[\frac{\partial H}{\partial \tau_{xy}} \quad -\frac{\partial H}{\partial v} \quad -\frac{\partial H}{\partial u} \quad \frac{\partial H}{\partial \sigma_y}\right]^T \tag{3.1.32}$$

由式(4.1.31)与式(3.1.32)得状态方程，见式(4.1.18)—(4.1.22). 对于边界条件，有关已知位移与力的泛函数为

$$\bar{\Pi}_s = \int_{S_u}(p_x\bar{u} + p_y\bar{v})ds - \int_{S_\sigma}(\bar{p}_x u + \bar{p}_y v)ds \tag{4.1.33}$$

对于未知位移与力的边界条件，其泛函为

$$\Pi_s = -\int_{S_u}\left[(E\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\sigma_y)l + \tau_{xy}m\right]uds$$

$$- \int_{S_u} (\tau_{xy} l + m\sigma_y) v ds \tag{4.1.34}$$

以上我们考虑了平面体界面的边界条件

根据式(4.1.32)--(4.1.34)可推导出弹性体平面应力的状态方程及其边界条件的计算格式. 由 4.1.2 和 4.1.3 二节可建立基于状态空间理论的多变量数值方法.

4.2 弹性平面条形体的状态空间法

设图 4.1 所示平面体,上表面作用有均布荷载 q,端面为简支. 假

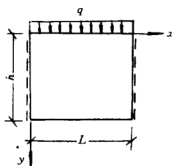


图 4.1 平面条形体

设平面体的二类变量场函数分别为

$$u = \sum_{m=1,3,5,\cdots} \bar{u}(y) \cos \frac{m\pi x}{L}$$

$$\sigma_y = \sum_{m=1,3,5,\cdots} \bar{\sigma}_y(y) \sin \frac{m\pi x}{L}$$

$$\tau_{xy} = \sum_{m=1,3,5,\cdots} \bar{\tau}_{xy}(y) \cos \frac{m\pi x}{L}$$

$$v = \sum_{m=1,3,5,\cdots} \bar{v}(y) \sin \frac{m\pi x}{L} \tag{4.2.1}$$

其中,$\bar{u}_m(y)$,$\bar{\sigma}_{ym}(y)$,…,均简写为 $\bar{u}(y)$,$\bar{\sigma}_y(y)$,…. 将式(4.2.1)代入式

(4.1.18)，经过整理后

$$\dot{\bar{\underset{\sim}{Y}}}=\bar{\underset{\sim}{D}}\,\bar{\underset{\sim}{Y}}+\bar{\underset{\sim}{F}} \tag{4.2.2}$$

式中

$$\bar{\underset{\sim}{Y}}=[\bar{u}\quad \bar{\sigma}_y\quad \bar{\tau}_{xy}\quad \bar{v}]^T \tag{4.2.3}$$

$$\dot{\bar{\underset{\sim}{Y}}}=\frac{\partial\bar{\underset{\sim}{Y}}}{\partial y} \tag{4.2.4}$$

$$\bar{\underset{\sim}{D}}=\left[\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{$\underset{\sim}{0}$}} & \frac{2(1+\mu)}{E} & -\frac{m\pi}{L} \\ & & \frac{m\pi}{L} & 0 \\ \hline E(\frac{m\pi}{L})^2 & -\mu\frac{m\pi}{L} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\underset{\sim}{0}$}} \\ \mu\frac{m\pi}{L} & \frac{1-\mu^2}{E} & & \end{array}\right] \tag{4.2.5}$$

根据文献[80]，状态方程(4.2.2)的解答为

$$\bar{\underset{\sim}{Y}}(y)=e^{\bar{\underset{\sim}{D}}y}\bar{\underset{\sim}{Y}}(0)+\int_0^y e^{\bar{\underset{\sim}{D}}(y-\tau)}\bar{\underset{\sim}{F}}(\tau)d\tau \tag{4.2.6}$$

式中

$$\bar{\underset{\sim}{Y}}(0)=[\bar{u}(0)\quad \bar{\sigma}_y(0)\quad \bar{\tau}_{xy}(0)\quad \bar{v}(0)]^T \tag{4.2.7}$$

$$\bar{\underset{\sim}{Y}}(y)=[\bar{u}(y)\quad \bar{\sigma}_y(y)\quad \bar{\tau}_{xy}(y)\quad \bar{v}(y)]^T \tag{4.2.8}$$

其中，$e^{\bar{\underset{\sim}{D}}y}$由马克劳林级数展开，取截断项来计算，即

$$e^{\bar{\underset{\sim}{D}}y}=\underset{\sim}{I}+\bar{\underset{\sim}{D}}y+\frac{\bar{\underset{\sim}{D}}^2}{2!}y^2+\frac{\bar{\underset{\sim}{D}}^3}{3!}y^3+\cdots \tag{4.2.9}$$

应用式(4.2.9)来计算指数矩阵，其精度由所取项数来确定. 当平面条形体高度 h 较大时，收敛速度较慢，这时可用开莱-哈密顿方法，该方法可将指数矩阵展开有限项来处理，可使计算量减少，详见文献[80]. 还可以应用分层法与传递矩阵来进行计算，式中的积分项可用数值积分法来计算.

在式(4.2.2)中，已考虑了端面的边界条件. 在引入上下面应力与位移边界条件时，需将边界面上的荷载展成三角级数，即有

$$q_m = \frac{2}{L}\int_0^L q\sin\frac{m\pi x}{L}dx$$

$$= \frac{2q}{m\pi}(1 - \cos m\pi) \quad (m = 1,3,5,\cdots) \qquad (4.2.10)$$

对于式(4.2.6)，不计体力，则有

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}(h) \\ \bar{\sigma}_y(h) \\ \bar{\tau}_{xy}(h) \\ \bar{v}(h) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & \bar{D}_{13} & \bar{D}_{14} \\ \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} & \bar{D}_{23} & \bar{D}_{24} \\ \bar{D}_{31} & \bar{D}_{32} & \bar{D}_{33} & \bar{D}_{34} \\ \bar{D}_{41} & \bar{D}_{42} & \bar{D}_{43} & \bar{D}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}(0) \\ \bar{\sigma}_y(0) \\ \bar{\tau}_{xy}(0) \\ \bar{v}(0) \end{Bmatrix} \qquad (4.2.11)$$

根据平面条形体的应力边界情况，有

$$\bar{\sigma}_y(0) = q, \qquad \bar{\tau}_{xy}(0) = 0$$

$$\bar{\sigma}_y(h) = 0, \qquad \bar{\tau}_{xy}(h) = 0 \qquad (4.2.12)$$

由式(4.2.11)与(4.2.12)得到定解方程为

$$\bar{\underset{\sim}{D}}\,\bar{\underset{\sim}{Y}}(0) = \underset{\sim}{P} \qquad (4.2.13)$$

由式(4.2.13)解得 $\bar{\underset{\sim}{Y}}(0)$ 值后，将其代入式(4.2.6)，可求出 $\bar{\underset{\sim}{Y}}(y)$ 值，最后由式(4.2.1) 和式(4.1.16) 求得平面条形体内任意点应力分量 $\underset{\sim}{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T$ 和位移分量 $\underset{\sim}{u} = [u \quad v]^T$ 值.

根据上面推出的计算公式，下面给出一个数值算例. 设 $L = 1.0$，$h = 0.1$，$\mu = 0.3$，$E = 2.1 \times 10^5$，$q = 1$. 级数项取 $m = 1,3,5,7,9$，指数矩阵取 10 项. 计算结果列表 4-1.

表 4-1　梁的应力与位移值

方法	状态法	材力法	状态法	材力法	状态法	材力法	状态法	材力法
h	σ_x		τ_{xy}		σ_y		$v\times10^{-3}$	$v\times10^{-3}$
0	−74.63	−75	0	0	1.0628		0.7585	
0.02	−44.37	−45	4.6382	4.8	0.9444		0.7601	
0.04	−14.53	−15	6.8962	7.2	0.6826		0.7609	
0.06	15.18	15	6.8778	7.2	0.3701		0.7609	0.7441
0.08	45.01	45	4.5996	4.8	0.1095		0.7603	
0.10	75.23	75	0	0	0		0.7583	

4.3 叠层矩形平面体的解法

上节介绍的是单个平面条形体的解法，对弹性平面多层体，每层的材料性质又不同，在这种情况下，则需要考虑建立每一层的状态方程，要用分层的方法来进行求解.

设叠层平面体有若干层，即 1，2，…，S 层，如图 4.2 所示. 若不考虑

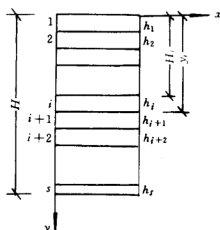


图 4.2　叠层平面条形体

体力，则各层的状态方程分别为

$$
\begin{aligned}
&\dot{\underset{\sim}{Y}}_1(y) = \underset{\sim}{D}_1(\bar{y}_1)\underset{\sim}{Y}_1(y), && 0 \leqslant y \leqslant h_1 \\
&\dot{\underset{\sim}{Y}}_2(y) = \underset{\sim}{D}_2(\bar{y}_2)\underset{\sim}{Y}_2(y), && h_1 \leqslant y \leqslant h_1 + h_2 \\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots && \vdots \\
&\dot{\underset{\sim}{Y}}_i(y) = \underset{\sim}{D}_i(\bar{y}_i)\underset{\sim}{Y}_i(y), && H_i \leqslant y \leqslant H_{i+1} \\
&\dot{\underset{\sim}{Y}}_{i+1}(y) = \underset{\sim}{D}_{i+1}(\bar{y}_{i+1})\underset{\sim}{Y}_{i+1}(y), && H_{i+1} \leqslant y \leqslant H_{i+2} \\
&\quad\vdots \qquad\qquad \vdots && \vdots \\
&\dot{\underset{\sim}{Y}}_s(y) = \underset{\sim}{D}_s(\bar{y}_s)\underset{\sim}{Y}_s(y), && H - h_s \leqslant y \leqslant H
\end{aligned}
\tag{4.3.1}
$$

式(4.3.1)的解答为

$$
\begin{aligned}
&\underset{\sim}{Y}_1(y) = \underset{\sim}{\varphi}_1\underset{\sim}{Y}_1(0), && \underset{\sim}{\varphi}_1 = e^{\underset{\sim}{D}_1(\bar{y}_1)h_1} \\
&\underset{\sim}{Y}_2(y) = \underset{\sim}{\varphi}_2\underset{\sim}{Y}_2(H_1), && \underset{\sim}{\varphi}_2 = e^{\underset{\sim}{D}_2(\bar{y}_2)h_2} \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots && \vdots \\
&\underset{\sim}{Y}_i(y) = \underset{\sim}{\varphi}_i\underset{\sim}{Y}_i(H_i), && \underset{\sim}{\varphi}_i = e^{\underset{\sim}{D}_i(\bar{y}_i)h_i} \\
&\underset{\sim}{Y}_{i+1}(y) = \underset{\sim}{\varphi}_{i+1}\underset{\sim}{Y}_{i+1}(H_{i+1}), && \underset{\sim}{\varphi}_{i+1} = e^{\underset{\sim}{D}_{i+1}(\bar{y}_{i+1})h_{i+1}} \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots && \vdots \\
&\underset{\sim}{Y}_S(y) = \underset{\sim}{\varphi}_S\underset{\sim}{Y}_S(H - h_S), && \underset{\sim}{\varphi}_S = e^{\underset{\sim}{D}_S(\bar{y}_S)h_S}
\end{aligned}
\tag{4.3.2}
$$

根据状态变量的连续性条件,有

$$\underset{\sim}{Y}_i(H_{i+1}) = \underset{\sim}{Y}_{i+1}(H_{i+1}) \tag{4.3.3}$$

由式(4.3.2),有

$$\underset{\sim}{Y}_i(H_{i+1}) = \underset{\sim}{\varphi}_i(\bar{y}_i)\underset{\sim}{Y}_i(H_i) \tag{4.3.4}$$

$$\underset{\sim}{Y}_{i+1}(H_{i+2}) = \underset{\sim}{\varphi}_{i+1}(\bar{y}_{i+1})\underset{\sim}{Y}_{i+1}(H_{i+1}) \tag{4.3.5}$$

将式(4.3.3)代入式(4.3.4),再将其代入式(4.3.5),有

$$\underset{\sim}{Y}_{i+1}(H_{i+2}) = \underset{\sim}{\varphi}_{i+1}(\bar{y}_{i+1}) \cdot \underset{\sim}{\varphi}_i(\bar{y}_i)\underset{\sim}{Y}_i(H_i) \tag{4.3.6}$$

依此类推,就有

$$\underset{\sim}{Y}_S(H) = \underset{\sim}{\varphi}_S\underset{\sim}{\varphi}_{S-1}\cdots\underset{\sim}{\varphi}_2\underset{\sim}{\varphi}_1\underset{\sim}{Y}_1(0)$$

或

$$\underset{\sim}{Y}_S(H) = \underset{\sim}{\Psi}\,\underset{\sim}{Y}_1(0) \tag{4.3.7}$$

式中

$$\underset{\sim}{\Psi} = \underset{\sim}{\varphi}_S\underset{\sim}{\varphi}_{S-1}\cdots\underset{\sim}{\varphi}_2\underset{\sim}{\varphi}_1 \tag{4.3.8}$$

$$\underset{\sim}{\varphi}_S = e^{\underset{\sim}{D}_S(\bar{y}_S)h_S} \qquad (S = 1,2,\cdots,S) \tag{4.3.9}$$

根据式(4.3.7),由叠层平面体界面的应力与位移的边界条件,得定解方程,即

$$\underset{\sim}{\Psi}\,\underset{\sim}{Y}_1(0) = \underset{\sim}{P} \tag{4.3.10}$$

由式(4.3.10)求得 $\underset{\sim}{Y}_1(0)$ 后,将其代入(4.3.2),可逐步求得各层的应

力与位移值，再由式(4.1.16)求出 σ_x，从而求得叠层体内全部应力与位移值. 有关指数矩阵的计算，有多种算法，详见文献[80].

4.4 基于状态空间理论的多变量样条有限元法

在文献[30]里，采用分段式三次B样条插值函数来构造位移的场函数，应用总势能原理建立样条有限元法的计算模型. 在本书的第二、三章中，应用三次B样条插值函数来构造二、三类变量的场函数，由广义变分原理分别建立了样条混合有限元法与三类变量样条有限元法的计算模型. 本节应用样条插值函数来构造二类场函数，由正则型哈密顿原理建立状态样条有限元法模型. 对于弹性平面体问题，应用式(4.1.30)并把它改写成两个部分，即域内部分泛函

$$\Pi_\Omega^* = \int_\Omega [(\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y} + \sigma_y\frac{\partial v}{\partial y}) - H]d\Omega \qquad (4.4.1)$$

式中 H 为哈密顿函数，见式(4.1.31).

设状态变量用三次B样条插值函数表示，就有

$$u = \underset{\sim}{\Phi}\,\underset{\sim}{\Gamma}_1,\ \sigma_y = \underset{\sim}{\Phi}\,\underset{\sim}{\Gamma}_2,\ \tau_{xy} = \underset{\sim}{\Phi}\,\underset{\sim}{\Gamma}_3,\ v = \underset{\sim}{\Phi}\,\underset{\sim}{\Gamma}_4 \qquad (4.4.2)$$

式中，$\underset{\sim}{\Phi}$ 为多点样条函数，$\underset{\sim}{\Gamma}_1,\underset{\sim}{\Gamma}_2,\underset{\sim}{\Gamma}_3,\underset{\sim}{\Gamma}_4$ 为样条结点参数，为待求量.

将式(4.4.2)代入式(4.4.1)得离散型泛函 Π_Ω^*，即

$$\begin{aligned}\Pi_\Omega^* = \int_\Omega \{ & (\underset{\sim}{\Gamma}_3{}^T\underset{\sim}{\Phi}'^T\underset{\sim}{\Phi}\,\underset{\sim}{\Gamma}_1 + \underset{\sim}{\Gamma}_2^T\underset{\sim}{\Phi}'^T\underset{\sim}{\Phi}\,\underset{\sim}{\Gamma}_4) - \frac{1}{2}(\frac{1}{G}\underset{\sim}{\Gamma}_3\underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi}\,\underset{\sim}{\Gamma}_3^T \\ & + \frac{1-\mu^2}{E})\underset{\sim}{\Gamma}_2^T\underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi}\,\underset{\sim}{\Gamma}_2 - E\underset{\sim}{\Gamma}_1^T\underset{\sim}{\Phi}'^T\underset{\sim}{\Phi}'\underset{\sim}{\Gamma}_1 \\ & - 2\mu\underset{\sim}{\Gamma}_2^T\underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi}'\underset{\sim}{\Gamma}_1 - 2\underset{\sim}{\Gamma}_3^T\underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi}'\underset{\sim}{\Gamma}_4\}d\Omega\end{aligned} \qquad (4.4.3)$$

根据对 Π_Ω^* 关于 $\underset{\sim}{Y}$ 的变分，得到以样条结点向量表示的状态方程

$$\underset{\sim}{a}\,\dot{\underset{\sim}{Y}} = \underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{Y} \qquad (4.4.4)$$

式中

$$\underset{\sim}{Y} = [\underset{\sim}{\Gamma}_1^T\quad \underset{\sim}{\Gamma}_2^T\quad \underset{\sim}{\Gamma}_3^T\quad \underset{\sim}{\Gamma}_4^T]^T,\quad \frac{\partial \underset{\sim}{Y}}{\partial y} = \dot{\underset{\sim}{Y}} \qquad (4.4.5)$$

$$
\underset{\sim}{a}=\int_{\Omega}\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi} & & & \underset{\sim}{0}\\ & \underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi} & & \\ & & \underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi} & \\ \underset{\sim}{0} & & & \underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi}\end{bmatrix}d\Omega \tag{4.4.6}
$$

$$
\underset{\sim}{D}_{\Omega}=\int_{\Omega}\left[\begin{array}{cc:cc} & & \frac{1}{G}\underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi} & -\underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi}' \\ \multicolumn{2}{c:}{\underset{\sim}{0}} & -\underset{\sim}{\Phi}'^T\underset{\sim}{\Phi} & 0 \\ \hdashline -E\underset{\sim}{\Phi}'^T\underset{\sim}{\Phi}' & -\mu\underset{\sim}{\Phi}'^T\underset{\sim}{\Phi} & & \\ -\mu\underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi}' & \frac{1-\mu^2}{E}\underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi} & \multicolumn{2}{c}{\underset{\sim}{0}}\end{array}\right]d\Omega . \tag{4.4.7}
$$

对已知边界位移与边界力，其泛函为

$$
\begin{aligned}
\overline{\Pi}_S &= \int_{S_u}(p_x\bar{u}+p_y\bar{v})ds-\int_{S_\sigma}(\bar{p}_xu+\bar{p}_yv)ds\\
&=\int_{S_u}\left[(\mu\sigma_y+E\frac{\partial u}{\partial x})l+\tau_{xy}m\right]\bar{u}ds+\int_{S_u}\left[\tau_{xy}l+\sigma_ym\right]\bar{v}ds\\
&\quad-\int_{S_\sigma}(\bar{p}_xu+\bar{p}_yv)ds
\end{aligned} \tag{4.4.8}
$$

将式(4.4.2)代入上式，并取泛函 $\overline{\Pi}_S$ 的变分，得到状态方程的非齐次项

$$
\underset{\sim}{F}=[-f_1\quad -f_2\quad -f_3\quad -f_4]^T \tag{4.4.9}
$$

式中

$$
f_1=\int_{S_u}\underset{\sim}{\Phi}^T m\bar{u}ds+\int_{S_u}\underset{\sim}{\Phi}^T l\bar{v}ds \tag{4.4.10}
$$

$$
f_2=-\int_{S_\sigma}\underset{\sim}{\Phi}^T\bar{p}_yds \tag{4.4.11}
$$

$$
f_3=\int_{S_u}\underset{\sim}{\Phi}'^T l\bar{u}ds-\int_{S_\sigma}\underset{\sim}{\Phi}^T\bar{p}_xds \tag{4.4.12}
$$

$$
f_4=\int_{S_u}\mu\underset{\sim}{\Phi}^T\bar{u}ds+\int_{S_u}\underset{\sim}{\Phi}^T m\bar{v}ds \tag{4.4.13}
$$

对未知边界位移与边界力，其相应的泛函为

$$\Pi_S = -\int_S [(E\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\sigma_y)l + \tau_{xy}m]uds$$

$$-\int_S (\tau_{xy}l + m\sigma_y)vds \qquad (4.4.14)$$

将式(4.4.2)代入上式，对泛函进行变分，便得状态方程的贡献项

$$\underset{\sim}{D}_s = \int_S \begin{bmatrix} m\underset{\sim}{\Phi}\,\underset{\sim}{\Phi}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & l\underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi} \\ \underset{\sim}{0} & m\underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi} & l\underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{\Phi}'^T El\underset{\sim}{\Phi} & \mu l\underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi} & m\underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi} & \underset{\sim}{0} \\ \mu l\underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & m\underset{\sim}{\Phi}^T\underset{\sim}{\Phi} \end{bmatrix} ds \qquad (4.4.15)$$

这样，弹性平面体总体状态方程为

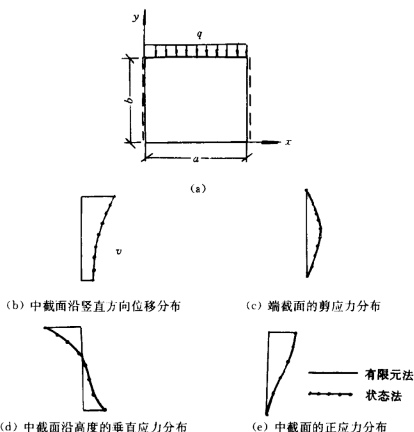
$$\underset{\sim}{a}\dot{\underset{\sim}{Y}} = (\underset{\sim}{D}_\Omega + \underset{\sim}{D}_s)\underset{\sim}{Y} + \underset{\sim}{F} \qquad (4.4.16)$$

式中，$\underset{\sim}{a}$、$\underset{\sim}{D}_\Omega$、$\underset{\sim}{D}_S$ 与 $\underset{\sim}{F}$ 分别见式(4.4.6)，(4.4.7)，(4.4.9) 与式(4.4.15). 利用第一章中的样条函数积分公式，可求得式(4.4.16) 中的所有系数矩阵，然后对该式进行直接积分，可求得样条结点参数，再由式(4.4.2) 与式(4.4.16) 求得弹性平面体的全部场变量值，即应力向量 $\underset{\sim}{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T$ 和位移向量 $\underset{\sim}{u} = [u \quad v]^T$.

4.5 数值算例

设有一两端简支深梁，承受面均布荷载，如图 4.3 所示. 计算数据：$E=1.0, \mu=0.3, a=b=1.0, t=1.0, q=1.0$.

根据上面的解法，由计算程序算得的数值结果如图表所示.



(b) 中截面沿竖直方向位移分布　　(c) 端截面的剪应力分布

(d) 中截面沿高度的垂直应力分布　　(e) 中截面的正应力分布

图 4.3　深梁的应力与位移分布

表 4-2　深梁的状态变量，位移分量 u、v，应力分量 σ_y、τ_{xy} 和 σ_x 值

$\tilde{Y}$ / b	v	u	σ_y	σ_x	τ_{xy}
0.0	−0.3146	0.2381	−0.0000	0.7468	0
0.1	−0.3341	0.1628	−0.0319	0.5010	0.1923
0.2	−0.3537	0.1230	−0.1133	0.3512	0.3235
0.3	−0.3796	0.1056	−0.2288	0.2592	0.4170
0.4	−0.4160	0.0990	−0.3675	0.1943	0.4850
0.5	−0.4653	0.0946	−0.5200	0.1286	0.5300
0.6	−0.5275	0.0825	−0.6749	0.0323	0.5454
0.7	−0.6011	0.0508	−0.8161	−0.1271	0.5148
0.8	−0.6811	0.0172	−0.9255	−0.3399	0.4179
0.9	−0.7612	−0.0124	−0.9912	−0.7325	0.2584
1.0	−0.8365	−0.3223	−1.0735	−1.2240	0

表 4-3　深梁的位移与应力最大值

位移与应力 \ 方法	状态空间法	有限元法[28]	样条有限元法[28]
v (0.5,1)	0.8365	0.831	0.8292
u (0,1)	−0.3223		
σ_y (0.5,1)	−1.0735		
σ_x (0.5,1)	−1.2240	−1.208	−1.205
(0.5,0)	0.7468	0.7480	0.7340
τ_{xy} (0,0.6)	0.5454		

4.6　基于状态空间理论的有限元法

通用有限元法或位移型有限元法单元列式，是由最小总势能原理和在单元上构造的位移插值函数来导出. 整体有限元列式是通过单元方程求和而得[2]. 对于基于状态空间理论的有限元法列式，是通过包含对偶变量应力 (σ_y,τ_{xy}) 与位移(u,v) 的泛函驻值原理来建立. 泛函定义[84]为

$$\Pi(\sigma_y,\tau_{xy},u,v)$$

$$=\int_\Omega\left[\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}+\sigma_y\frac{\partial v}{\partial y}-H\right]d\Omega-\int_{S_\sigma}\{\bar{p}_x u+\bar{p}_y v\}ds \quad (4.6.1)$$

式中，哈密顿函数 H 见式(4.1.31).

4.6.1　单元状态方程

对于弹性条形体问题，沿 x 方向划分 n 个单元，$(n+1)$个结点，如图 4.4 所示.

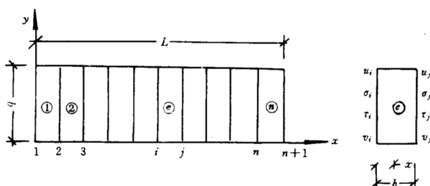


图 4.4 单元划分

现考虑任一单元，单元内任一截面处的应力与位移的插值表达式分别为

$$
\begin{aligned}
u &= \underset{\sim}{N}(x)\underset{\sim}{u^e}(y) \\
\sigma &= \underset{\sim}{N}(x)\underset{\sim}{\sigma^e}(y) \\
\tau &= \underset{\sim}{N}(x)\underset{\sim}{\tau^e}(y) \\
v &= \underset{\sim}{N}(x)\underset{\sim}{v^e}(y)
\end{aligned}
\tag{4.6.2}
$$

式中 $\underset{\sim}{N}$ 为线性插值函数

$$
\underset{\sim}{N}(x) = \left[1 - \frac{x}{h} \quad \frac{x}{h}\right] \tag{4.6.3}
$$

$$
\underset{\sim}{u^e} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}, \underset{\sim}{\sigma^e} = \begin{Bmatrix} \sigma_i \\ \sigma_j \end{Bmatrix}, \underset{\sim}{\tau^e} = \begin{Bmatrix} \tau_i \\ \tau_j \end{Bmatrix}, \underset{\sim}{v^e} = \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \end{Bmatrix} \tag{4.6.4}
$$

为方便计，σ_y, τ_{xy} 均写成 σ, τ.

现将式(4.6.2)代入式(4.6.1)，再取泛函 Π^e 的驻值，即有

$$
\frac{\partial \Pi^e}{\partial \underset{\sim}{u^e}} = \frac{\partial \Pi^e}{\partial \underset{\sim}{\sigma^e}} = \frac{\partial \Pi^e}{\partial \underset{\sim}{\tau^e}} = \frac{\partial \Pi^e}{\partial \underset{\sim}{v^e}} = \underset{\sim}{0}
$$

得单元状态方程

$$
\underset{\sim}{a^e}\dot{\underset{\sim}{Y}}{}^e = \underset{\sim}{D_\Omega^e} \cdot \underset{\sim}{Y^e} + \underset{\sim}{F^e} \tag{4.6.5}
$$

式中

$$
\underset{\sim}{Y^e} = \left[\underset{\sim}{u^e} \quad \underset{\sim}{\sigma^e} \quad \underset{\sim}{\tau^e} \quad \underset{\sim}{v^e}\right]^T
$$

$$= [u_i \quad u_j \vdots \quad \sigma_i \quad \sigma_j \vdots \quad \tau_i \quad \tau_j \vdots \quad v_i \quad v_j]^T \tag{4.6.6}$$

$$\dot{\underset{\sim}{Y}}^e = \frac{d\underset{\sim}{Y}^e}{dy} \tag{4.6.7}$$

$$\underset{\sim}{a}^e = \int_0^h \begin{bmatrix} \underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{N} & & & \\ & \underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{N} & & \underset{\sim}{0} \\ & & \underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{N} & \\ & \underset{\sim}{0} & & \underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{N} \end{bmatrix} dx \tag{4.6.8}$$

$$\underset{\sim}{D}_\Omega^e = \int_0^h \left[\begin{array}{cc:cc} & & \frac{1}{G}\underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{N} & -\underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{N}' \\ & \underset{\sim}{0} & -\underset{\sim}{N}'^T\underset{\sim}{N} & \underset{\sim}{0} \\ \hdashline -E\underset{\sim}{N}'^T\underset{\sim}{N}'^T & -\mu\underset{\sim}{N}'^T\underset{\sim}{N} & & \\ -\mu\underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{N}' & \frac{1-\mu^2}{E}\underset{\sim}{N}^T\underset{\sim}{N} & & \underset{\sim}{0} \end{array}\right] dx \tag{4.6.9}$$

$$\underset{\sim}{F}^e = [\underset{\sim}{0} \quad \int_{S_\sigma} \underset{\sim}{N}^T \bar{p}_y ds \quad \int_{S_\sigma} \underset{\sim}{N}^T \bar{p}_x ds \quad \underset{\sim}{0}]^T \tag{4.6.10}$$

4.6.2 整体状态有限元方程

这里的整体状态有限元方程的建立与通用有限元法相同，对各单元求和，得

$$\sum_{e=1} (\underset{\sim}{a}^e \dot{\underset{\sim}{Y}}^e) = \sum_{e=1} (\underset{\sim}{D}_\Omega^e \underset{\sim}{Y}^e) + \sum_{e=1} \underset{\sim}{F}^e$$

将上式改写为

$$\underset{\sim}{a}\,\dot{\underset{\sim}{Y}} = \underset{\sim}{D}_\Omega \underset{\sim}{Y} + \underset{\sim}{F} \tag{4.6.11}$$

于是有

$$\dot{\underset{\sim}{Y}} = \underset{\sim}{D}\underset{\sim}{Y} + \underset{\sim}{P} \tag{4.6.12}$$

式中

$$\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{a}^{-1}\underset{\sim}{D}_{\Omega}, \quad \underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{a}^{-1}\underset{\sim}{F} \tag{4.6.13}$$

根据状态空间理论[80]，式(4.6.12)的解答为

$$\underset{\sim}{Y} = e^{\underset{\sim}{D}y}\underset{\sim}{Y}(0) + \int_0^y e^{\underset{\sim}{D}(y-\tau)}\underset{\sim}{P}(\tau)d\tau \tag{4.6.14}$$

4.6.3 边界条件的处理

根据上述二节得到了单元状态方程(4.6.5)和整体状态方程(4.6.12)．实际上，我们得到了沿 x 方向离散后的 $4(n+1)$ 个一阶微分方程组．为了求解一阶微分方程组，必需考虑问题的边界条件．

下面，我们来考虑条形区域的边界条件．

在 $y=0$、$y=b$ 两条边上，若有力作用，其力的边界条件为

$$\begin{aligned}&\sigma_y(x,0) = \bar{\sigma}_y(x,0), \tau_{xy}(x,0) = \bar{\tau}_{xy}(x,0)\\&\sigma_y(x,b) = \bar{\sigma}_y(x,b), \tau_{xy}(x,b) = \bar{\tau}_{xy}(x,b)\end{aligned} \tag{4.6.15}$$

在上述边界上，对于位移边界条件为

$$\begin{aligned}&u(x,0) = \bar{u}(x,0), v(x,0) = \bar{v}(x,0)\\&u(x,b) = \bar{u}(x,b), v(x,b) = \bar{v}(x,b)\end{aligned} \tag{4.6.16}$$

这样可提供 $4(n+1)$ 个边界条件．对于条形体两侧边的边界条件，对力的边界条件，有

$$\begin{aligned}&x=0, \quad \sigma_x(0,y) = \bar{\sigma}_x(0,y), \tau_{xy}(0,y) = \bar{\tau}_{xy}(0,y)\\&x=L, \quad \sigma_x(L,y) = \bar{\sigma}_x(L,y), \tau_{xy}(L,y) = \bar{\tau}_{xy}(L,y)\end{aligned} \tag{4.6.17}$$

对于位移边界条件

$$\begin{aligned}&x=0, \quad u(0,y) = \bar{u}_0(y), v(0,y) = \bar{v}_0(y)\\&x=L, \quad u(L,y) = \bar{u}(y), v(L,y) = \bar{v}(y)\end{aligned} \tag{4.6.18}$$

以上，我们建立了状态有限元法的计算格式．较详细的计算步骤，可见下节数值算例．

4.7 数值算例

上节介绍了平面弹性力学的状态空间有限元法的一般性列式过程. 本节通过一个悬臂梁例题来具体阐明列式的步骤. 为了方便单元状态方程的集合,需要将式(4.6.5)中的状态变量改变排列次序,把单元状态方程变成如下形式:

$$\left[\begin{array}{c:c} \underset{\sim}{a}_{ii}^{e} & \underset{\sim}{a}_{ij}^{e} \\ \hdashline \underset{\sim}{a}_{ji}^{e} & \underset{\sim}{a}_{jj}^{e} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} \dot{\underset{\sim}{Y}}_{i}^{e} \\ \hdashline \dot{\underset{\sim}{Y}}_{j}^{e} \end{array}\right\}=\left[\begin{array}{c:c} \underset{\sim}{D}_{ii}^{e} & \underset{\sim}{D}_{ij}^{e} \\ \hdashline \underset{\sim}{D}_{ji}^{e} & \underset{\sim}{D}_{jj}^{e} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} \underset{\sim}{Y}_{i}^{e} \\ \hdashline \underset{\sim}{Y}_{j}^{e} \end{array}\right\}+\left\{\begin{array}{c} \underset{\sim}{F}_{i}^{e} \\ \hdashline \underset{\sim}{F}_{j}^{e} \end{array}\right\} \tag{4.7.1}$$

式中

$$\underset{\sim}{Y}_{i}^{e}=[u_{i} \quad \sigma_{i} \quad \tau_{i} \quad v_{i}]^{T},$$

$$\dot{\underset{\sim}{Y}}_{i}^{e}=\frac{d\underset{\sim}{Y}_{i}^{e}}{dy} \quad (i=i,j) \tag{4.7.2}$$

对于线性插值代数多项式(4.6.3),则有

$$\underset{\sim}{a}_{ii}^{e}=\underset{\sim}{a}_{jj}^{e}=\text{diag}\cdot\left[\frac{h}{3} \quad \frac{h}{3} \quad \frac{h}{3} \quad \frac{h}{3}\right]$$

$$\underset{\sim}{a}_{ij}^{e}=\underset{\sim}{a}_{ji}^{e}=\text{diag}\cdot\left[\frac{h}{6} \quad \frac{h}{6} \quad \frac{h}{6} \quad \frac{h}{6}\right] \tag{4.7.3}$$

$$\underset{\sim}{D}_{ii}^{e}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{h}{3G} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{E}{h} & -\frac{\mu}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{2} & \frac{1-\mu^{2}}{E}\frac{h}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.7.4}$$

$$\underset{\sim}{D}_{jj}^{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{h}{3G} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{E}{h} & \frac{\mu}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{2} & \frac{1-\mu^2}{E}\frac{h}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.7.5}$$

$$\underset{\sim}{D}_{ij}^{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{h}{6G} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{E}{h} & -\frac{\mu}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{2} & \frac{1-\mu^2}{E}\frac{h}{6} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.7.6}$$

$$\underset{\sim}{D}_{ji}^{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{h}{6G} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{E}{h} & \frac{\mu}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{2} & \frac{1-\mu^2}{E}\frac{h}{6} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.7.7}$$

把所有单元 $e=1,2,\cdots,n$ 集合起来，就得到整体结构的状态方程，有

$$\underset{\sim}{a}\dot{\underset{\sim}{Y}} = \underset{\sim}{D}^{*}\underset{\sim}{Y} + \underset{\sim}{F} \tag{4.7.8}$$

式中

$$\underset{\sim}{Y} = [u_1\ \sigma_1\ \tau_1\ v_1 \ \vdots\ u_2\ \sigma_2\ \tau_2\ v_2 \ \vdots\ \cdots\ \vdots\ u_n\ \sigma_n\ \tau_n\ v_n]^T$$

$$\dot{\underset{\sim}{Y}} = \frac{d\underset{\sim}{Y}}{dy} \tag{4.7.9}$$

$$
\underset{\sim}{a}=\begin{bmatrix}
\underset{\sim}{a}_{11}^{(1)} & \underset{\sim}{a}_{12}^{(1)} & & & \underset{\sim}{0} \\
\underset{\sim}{a}_{21}^{(1)} & \underset{\sim}{a}_{22}^{(1)}+\underset{\sim}{a}_{11}^{(2)} & & & \\
 & & \ddots & & \\
 & \underset{\sim}{0} & & \underset{\sim}{a}_{22}^{(n-1)}+\underset{\sim}{a}_{11}^{(n)} & \underset{\sim}{a}_{12}^{(n)} \\
 & & & \underset{\sim}{a}_{21}^{(n)} & \underset{\sim}{a}_{22}^{(n)}
\end{bmatrix} \tag{4.7.10}
$$

$$
\underset{\sim}{D}^{*}=\begin{bmatrix}
\underset{\sim}{D}_{11}^{(1)} & \underset{\sim}{D}_{12}^{(1)} & & & \underset{\sim}{0} \\
\underset{\sim}{D}_{21}^{(1)} & \underset{\sim}{D}_{22}^{(1)}+\underset{\sim}{D}_{11}^{(2)} & & & \\
 & & \ddots & & \\
 & \underset{\sim}{0} & & \underset{\sim}{D}_{22}^{(n-1)}+\underset{\sim}{D}_{11}^{(n)} & \underset{\sim}{D}_{12}^{(n)} \\
 & & & \underset{\sim}{D}_{21}^{(n)} & \underset{\sim}{D}_{22}^{(n)}
\end{bmatrix} \tag{4.7.11}
$$

$$
\underset{\sim}{F}=[\underset{\sim}{f}_1 \quad \underset{\sim}{0} \quad \underset{\sim}{0} \quad \underset{\sim}{0} \quad \cdots \quad \underset{\sim}{0} \quad \underset{\sim}{0} \quad \underset{\sim}{0} \quad \underset{\sim}{f}_n]^T \tag{4.7.12}
$$

这里所举的悬臂梁如图 4.5 所示，左端为自由端，给定力的边界条件，

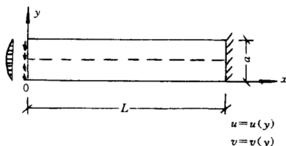


图 4.5　悬臂梁自由端受剪应力作用

即已知 $\bar{p}_x$ 及 $\bar{p}_y$，根据式(4.6.10)

$$
\int_0^y \underset{\sim}{f}_1 dy=[0 \quad \int_0^y \underset{\sim}{N}^T(0)\bar{p}_x dy \quad \int_0^y \underset{\sim}{N}^T(0)\bar{p}_y dy \quad 0]^T \tag{4.7.13}
$$

考虑到

$p_x = \bar{\sigma}_x l + \tau_{xy} m, \bar{p}_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m$ 及 $\sigma_x = 0, \tau_{xy} = \tau(y), l = -1, m = 0$

于是

$$\underset{\sim}{f}_1 = [0 \quad -\tau \quad 0 \quad 0]^T \tag{4.7.14}$$

根据梁的左端已知边界力，得到状态方程的非奇次项贡献为

$$\underset{\sim}{F}_1 = [0 \quad -\tau \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0]^T \tag{4.7.15}$$

对梁右端为固支情况，给定位移的边界条件，即 $u = \bar{u}(y), v = \bar{v}(y)$．为了保持状态方程的形式不变，特构造一个矩阵方程[95]，使其满足位移边界条件，则有

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{E}{h} & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ \sigma_n \\ \tau_n \\ v_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{v}_n(y) \\ 0 \\ -\dfrac{E}{h}\bar{u}_n(y) \\ \mu\bar{u}_n(y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.7.16}$$

将式(4.7.16)累加到总体状态方程的相应位置上，在 $\underset{\sim}{D}^*$ 阵右下角 4×4 元素位置上加入式(4.7.16)左端的矩阵元素，对非奇次项的贡献为

$$\underset{\sim}{F}_2 = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad \bar{v}(y) \quad 0 \quad -\frac{E}{h}u_n(y) \quad \mu u_n(y)]^T \tag{4.7.17}$$

这样，总体状态方程的非奇次项

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}_1 + \underset{\sim}{F}_2 \tag{4.7.18}$$

这就完成了梁两端力与位移边界条件的处理.

现将式(4.7.8)进行变形，有

$$\dot{\underset{\sim}{Y}} = \underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{Y} + \underset{\sim}{P} \tag{4.7.19}$$

式中

$$\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{a}^{-1}\underset{\sim}{D}^*, \underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{a}^{-1}\underset{\sim}{F} \tag{4.7.20}$$

对上式进行积分，有

$$\underset{\sim}{Y}(y) = e^{\underset{\sim}{D}y}\underset{\sim}{Y}(0) + \int_0^y e^{\underset{\sim}{D}(y-\tau)}\underset{\sim}{P}(\tau)d\tau \tag{4.7.21}$$

式中，指数矩阵函数可应用级数展开，取截断项来计算，对积分项可应用高斯数值积分法来计算.

最后，利用梁的上下面应力边界条件，即

$$\underset{\sim}{Y}(0)=[u_1(0)\sigma_1(0)\tau_1(0)v_1(0)\cdots u_n(0)\sigma_n(0)\tau_n(0)v_n(0)]^T$$

$$\underset{\sim}{Y}(a)=[u_1(a)\sigma_1(a)\tau_1(a)v_1(a)\cdots u_n(a)\sigma_n(a)\tau_n(a)v_n(a)]^T$$

可得定解方程

$$\underset{\sim}{\bar{D}}^{*}\underset{\sim}{u}(0)=\underset{\sim}{P} \tag{4.7.22}$$

由式(4.7.22)解出 $\underset{\sim}{u}(0)$，根据式(4.7.21)求得梁内任意高度处的状态变量，再由式(4.1.16)求出应力分量 σ_x，从而求得梁内全部应力与位移分量值. 下面给出一个承受均布荷载的简支梁的数值结果. 已知，$E=1,\mu=0.3,a=0.2,L=1.2,q=1.0$. 计算结果列于表 4-4.

表 4-4　梁中央截面处下端竖直位移与正应力值和挤压应力分布

位移与应力	v	σ_x	σ_y				
			0.00	0.05	0.10	0.15	0.2
6 单元 [95]	42.925	24.370	0.000	0.119	0.493	0.849	1.000
解析解 [24]	43.065	26.800	0.000	0.156	0.500	0.844	1.000

4.8　极坐标系弹性平面问题的状态方程

对于弹性力学平面问题，在极坐标系内，其控制方程有 4 组.

平衡方程

$$\underset{\sim}{L_1}\underset{\sim}{\sigma}+\underset{\sim}{f}=\underset{\sim}{0} \tag{4.8.1}$$

式中，微分算子

$$\underset{\sim}{L_1}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r} & -\dfrac{1}{r} & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\\ 0 & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} & (\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{2}{r})\end{bmatrix} \tag{4.8.2}$$

应力分量与体力分量分别为

$$\underset{\sim}{\sigma}=[\sigma_r\quad\sigma_\theta\quad\tau_{r\theta}]^T,\underset{\sim}{f}=[f_r\quad f_\theta]^T \tag{4.8.3}$$

几何方程

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{L}_2^T \underset{\sim}{u} \tag{4.8.4}$$

式中，微分算子

$$\underset{\sim}{L}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & (\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}) \end{bmatrix}^T \tag{4.8.5}$$

位移分量为

$$\underset{\sim}{u} = [u_r \quad u_\theta]^T \tag{4.8.6}$$

物理方程

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{d}_e \underset{\sim}{L}_2^T \underset{\sim}{u} \tag{4.8.7}$$

式中，弹性矩阵 $\underset{\sim}{d}_e$ 见式(4.1.13).

边界条件

$$\text{位移边界条件}: \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{\bar{u}} \tag{4.8.8}$$

$$\text{应力边界条件}: \underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{\bar{p}} \tag{4.8.9}$$

式中

$$\underset{\sim}{p} = [p_r \quad p_\theta]^T \tag{4.8.10}$$

由物理方程式(4.8.7)，推导出环向应力分量为

$$\sigma_\theta = \mu\sigma_r + E\frac{u_r}{r} + \frac{E}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \tag{4.8.11}$$

由几何与物理方程有

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\theta) \tag{4.8.12}$$

将式(4.8.11)代入上式，得

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1-\mu^2}{E}\sigma_r - \mu\frac{u_r}{r} - \frac{\mu}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \tag{4.8.13}$$

由平衡方程组的第一式，并将式(4.8.11)代入其中，有

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_r}{r} + \frac{1}{r}\sigma_\theta - f_r$$

$$= -\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(1-\mu)\sigma_r + \frac{E}{r^2}u_r + \frac{E}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - f_r \tag{4.8.14}$$

由平衡方程的第二式，将式(4.8.11)代入其中，整理后，有

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} = -\frac{E}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{\mu}{r}\frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} - \frac{2\tau_{r\theta}}{r} - \frac{E}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - f_\theta \tag{4.8.15}$$

由物理方程与几何方程的第三式

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial r} = \frac{u_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\tau_{r\theta}}{G} \tag{4.8.16}$$

现将式(4.8.13)—(4.8.16)集合起来，组成状态方程如下：

$$\dot{\underset{\sim}{Y}} = \underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{Y} + \underset{\sim}{F} \tag{4.8.17}$$

式中

$$\underset{\sim}{Y} = [u_r \quad \sigma_r \quad \tau_{r\theta} \quad u_\theta]^T, \dot{\underset{\sim}{Y}} = \frac{d\underset{\sim}{Y}}{dr} \tag{4.8.18}$$

$$\underset{\sim}{D} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{D}_{11} & \underset{\sim}{D}_{12} \\ \underset{\sim}{D}_{21} & \underset{\sim}{D}_{22} \end{bmatrix} \tag{4.8.19}$$

其中

$$\underset{\sim}{D}_{11} = \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{r} & \frac{1-\mu^2}{E} \\ \frac{E}{r^2} & -\frac{(1-\mu)}{r} \end{bmatrix}, \underset{\sim}{D}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{E}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{D}_{21} = \begin{bmatrix} -\frac{E}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{\mu}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \end{bmatrix}, \underset{\sim}{D}_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{r} & -\frac{E}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ \frac{1}{G} & \frac{1}{r} \end{bmatrix} \tag{4.8.20}$$

$$\underset{\sim}{F} = [0 \quad -f_r \quad -f_\theta \quad 0]^T \tag{4.8.21}$$

在位移的边界上

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{\bar{u}} \tag{4.8.22}$$

在应力的边界上

$$\sigma_r r n_r + \tau_{r\theta} n_\theta = \bar{p}_r \tag{4.8.23}$$

$$\sigma_\theta n_\theta + \tau_{r\theta} n_r = \bar{p}_\theta \tag{4.8.24}$$

或

$$(\mu\sigma_r + E\frac{u_r}{r} + \frac{E}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta})n_\theta + \tau_{r\theta} n_r = \bar{p}_\theta \tag{4.8.25}$$

对于各向同性体与正交各向异性体均可以求解.在求解问题之前,先把问题分解成对称与反对称二种情况来处理.下节将给出一个轴对称问题的算例.

4.9 轴对称厚、薄壁圆筒的统一问题

4.9.1 单层圆筒问题

在工程实际问题中,常遇到轴对称厚、薄壁圆筒问题,例如压力管道等.本节介绍用状态空间法分析厚、薄壁圆筒问题,即拉梅(Lame)问题.

对于几何形状与荷载情况均轴对称的厚、薄壁圆筒问题,在不计体力的情况下,其状态方程由式(4.8.17)退化为

$$\dot{\underset{\sim}{Y}} = \underset{\sim}{D}(r)\underset{\sim}{Y} \tag{4.9.1}$$

式中

$$\underset{\sim}{D}(r) = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{D}_{11} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{D}_{22} \end{bmatrix} \tag{4.9.2}$$

其中

$$\underset{\sim}{D}_{11} = \begin{bmatrix} -\frac{\mu}{r} & \frac{1-\mu^2}{E} \\ \frac{E}{r^2} & -\frac{(1-\mu)}{r} \end{bmatrix}, \underset{\sim}{D}_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{r} & 0 \\ \frac{1}{G} & \frac{1}{r} \end{bmatrix}. \tag{4.9.3}$$

方程(4.9.1)的解答

$$\underset{\sim}{Y}(r) = e^{\int_a^r \underset{\sim}{D}(r)dr}\underset{\sim}{Y}(a) \tag{4.9.4}$$

或

$$\underset{\sim}{Y}(r) = e^{\underset{\sim}{A}(r)}\underset{\sim}{Y}(a) \tag{4.9.5}$$

式中

$$\underset{\sim}{A}(r) = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_{11} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{A}_{22} \end{bmatrix}, \underset{\sim}{Y}(a) = [u_r(a)\ \sigma_r(a)\ \tau_{r\theta}(a)\ u_0(a)]^T \tag{4.9.6}$$

其中

$$\underset{\sim}{A}_{11} = \begin{bmatrix} -\mu\ln\dfrac{r}{a} & \dfrac{1-\mu^2}{E}(r-a) \\ -E(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{a}) & -(1-\mu)\ln\dfrac{r}{a} \end{bmatrix} \tag{4.9.7}$$

$$\underset{\sim}{A}_{22} = \begin{bmatrix} -2\ln\dfrac{r}{a} & 0 \\ \dfrac{1}{G}(r-a) & \ln\dfrac{r}{a} \end{bmatrix} \tag{4.9.8}$$

式(4.9.5)中的指数矩阵 $\underset{\sim}{e}^{A(r)}$ 的求解方法有多种，这里采用马克劳林级数，即

$$\underset{\sim}{e}^{A(r)} = \underset{\sim}{I} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k}{k!} \tag{4.9.9}$$

根据边界条件与轴对称条件，即

$$\underset{\sim}{Y}(b) = [u_r(b)\quad -q_0\quad 0\quad 0]^T \tag{4.9.10}$$

应用式(4.9.10)与式(4.9.9)得定解方程

$$\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{Y}(a) = \underset{\sim}{P} \tag{4.9.11}$$

当从上式求得 $\underset{\sim}{Y}(a)$ 值后，再代入式(4.9.5)可求得状态变量 $\underset{\sim}{Y}(r)$ 值.

根据上面的计算公式，给出薄壁与厚壁圆筒的算例结果. 圆筒的物理常数与几何尺寸：弹性模量 $E=1$，泊松比 $\mu=0.3$，对薄壁圆筒 $a=1.0$，$b=1.1$，对厚壁圆筒 $b=2.0$，内压力 $p=1.0$. 这里所得计算结果与弹性力学的拉梅解答作了比较，两者十分接近. 表 4-5，4-6 与图 4.6，4.7 表示了厚、薄壁圆筒的应力分布情况.

表 4-5　薄壁圆筒的位移与应力值

位移与应力 / r	u_r	[24]	σ_r	[24]	σ_θ	[24]
1.00	−11.520	−11.524	−0.000	−0.000	−11.520	−11.524
1.01	−11.487	−11.490	−0.114	−0.114	−11.407	−11.410
1.02	−11.454	−11.458	−0.224	−0.224	−11.297	−11.030
1.03	−11.423	−11.427	−0.331	−0.331	−11.190	−11.193
1.04	−11.394	−11.397	−0.435	−0.435	−11.086	−11.089
1.05	−11.365	−11.369	−0.536	−0.536	−10.985	−10.988
1.06	−11.338	−11.342	−0.634	−0.634	−10.886	−10.890
1.07	−11.321	−11.316	−0.723	−0.729	−10.792	−10.795
1.08	−11.288	−11.292	−0.822	−0.822	−10.698	−10.702
1.09	−11.264	−11.268	−0.912	−0.912	−10.608	−10.612
1.10	−11.241	−11.246	−1.000	−1.000	−10.519	−10.524

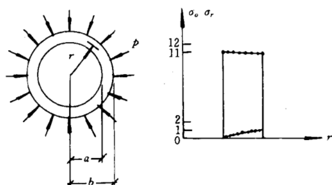


图 4.6　薄壁圆筒的应力分布

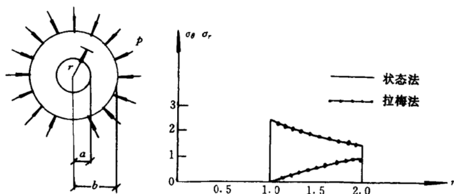


图 4.7　厚壁圆筒的应力分布

表 4-6　厚壁圆筒的位移与应力值

位移与应力 / r	u_r	[24]	σ_r	[24]	σ_θ	[24]
1.00	−2.638	−2.667	0.000	0.000	−2.638	−2.667
1.10	−2.574	−2.602	−0.224	−0.231	−2.409	−2.435
1.20	−2.535	−2.564	−0.403	−0.407	−2.234	−2.259
1.30	−2.513	−2.546	−0.540	−0.544	−2.095	−2.122
1.40	−2.504	−2.544	−0.648	−0.653	−2.122	−1.983
1.50	−2.506	−2.555	−0.736	−0.741	−1.892	−1.926
1.60	−2.516	−2.576	−0.810	−0.813	−1.815	−1.854
1.70	−2.533	−2.606	−0.869	−0.872	−1.751	−1.795
1.80	−2.555	−2.462	−0.921	−0.922	−1.695	−1.745
1.90	−2.582	−2.685	−0.963	−0.964	−1.648	−1.703
2.00	−2.614	−2.733	−1.000	−1.000	−1.607	−1.667

4.9.2　多层圆管问题

对于多层与叠层圆管问题，要用分层的方法来处理．例如把圆管壁

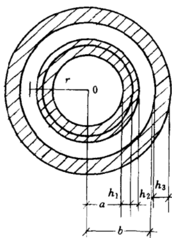


图 4.8′　多层圆管截面

分成若干薄层 1,2,…,S,如图 4.8 所示,则各层的状态方程分别为

$$
\begin{aligned}
&\dot{\underset{\sim}{Y}}_1(r) = \underset{\sim}{D}_1(\bar{r}_1)\underset{\sim}{Y}_1(r) && a \leqslant r \leqslant (a + h_1) \\
&\dot{\underset{\sim}{Y}}_2(r) = \underset{\sim}{D}_2(\bar{r}_2)\underset{\sim}{Y}_2(r) && (a + h_1) \leqslant r \leqslant (a + h_1 + h_2) \\
&\quad\vdots && \quad\vdots \\
&\dot{\underset{\sim}{Y}}_S(r) = \underset{\sim}{D}_S(\bar{r}_S)\underset{\sim}{Y}_S(r) && (b - h_s) \leqslant r \leqslant b
\end{aligned}
\tag{4.9.12}
$$

式中,$\bar{r}_1,\bar{r}_2,\cdots,\bar{r}_s$ 为各层中心到圆心的半径,上式的解答

$$
\begin{aligned}
&\underset{\sim}{Y}_1(r) = \underset{\sim}{\varphi}_1\underset{\sim}{Y}_1(a), && \underset{\sim}{\varphi}_1 = e^{\underset{\sim}{D}_1(\bar{r}_1)h_1} \\
&\underset{\sim}{Y}_2(r) = \underset{\sim}{\varphi}_2\underset{\sim}{Y}_2(a + h_1), && \underset{\sim}{\varphi}_2 = e^{\underset{\sim}{D}_2(\bar{r}_2)h_2} \\
&\quad\vdots && \quad\vdots \\
&\underset{\sim}{Y}_s(r) = \underset{\sim}{\varphi}_s\underset{\sim}{Y}_s(b - h_s), && \underset{\sim}{\varphi}_s = e^{\underset{\sim}{D}_s(\bar{r}_s)h_s}
\end{aligned}
\tag{4.9.13}
$$

根据层间状态变量的连续性条件,有

$$\underset{\sim}{Y}_i(H_{i+1}) = \underset{\sim}{Y}_{i+1}(H_{i+1}) \tag{4.9.14}$$

对各层间均应用式(4.9.14),就有

$$\underset{\sim}{Y}_S(b) = \underset{\sim}{\Psi}\,\underset{\sim}{Y}_1(a) \tag{4.9.15}$$

式中

$$\underset{\sim}{\Psi} = \underset{\sim}{\varphi}_s\underset{\sim}{\varphi}_{s-1}\cdots\underset{\sim}{\varphi}_2\underset{\sim}{\varphi}_1 \tag{4.9.16}$$

其中

$$\underset{\sim}{\varphi}_s = e^{\underset{\sim}{D}_s(\bar{r}_s)h_s} \tag{4.9.17}$$

根据多层管壁内外界面的应力与位移条件,得定解方程

$$\underset{\sim}{\Psi}\,\underset{\sim}{Y}_1(a) = \underset{\sim}{P} \tag{4.9.18}$$

由式(4.9.18)求得 $\underset{\sim}{Y}_1(a)$后,将其代入(4.9.13),可求得多层圆管壁内应力与位移值.

4.9.3 数值算例

设有无限长的圆截面的压力管,埋在无限大的弹性体内,管内承受均匀压力 $q=1$,压力管的几何尺寸与物理常数为 $a = 1.0$,$b = 1.1$,$E = 1.0$,$\mu = 0.3$,弹性体的常数 $E' = 0.8$,$\mu' = 0.4$.

这里计算结果与弹性力学精确法计算结果作了比较，见表 4-7 与 4-8，压力管应力分布与无限大弹性体应力分布，如图 4.9 所示.

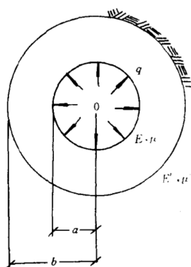
表 4-7　压力管壁应力值

方法 / r	弹性力学精确解		状态空间法	
	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ
1.000	−1.0000	1.4756	−1.0000	1.4709
1.020	−0.9519	1.4276	−0.9520	1.4229
1.040	−0.9066	1.3822	−0.9068	1.3777
1.060	−0.8638	1.3400	−0.8641	1.3350
1.080	−0.8234	1.2990	−0.8238	1.2945
1.100	−0.7852	1.2608	−0.7857	1.2578

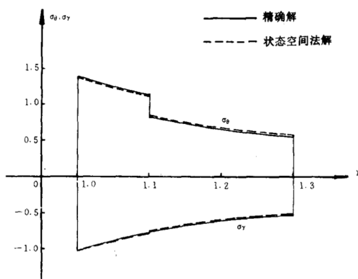
表 4-8　压力管壁外无限大弹性体的内应力值

方法 / r	弹性力学精确解		状态空间法	
	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ
1.100	−0.7852	0.7852	−0.7657	0.7922
1.120	−0.7574	0.7574	−0.7381	0.7647
1.140	−0.7310	0.7310	−0.7120	0.7385
1.160	−0.7061	0.7061	−0.6872	0.7137
1.180	−0.6823	0.6823	−0.6637	0.6901
1.200	−0.6598	0.6598	−0.6413	0.6677
1.220	−0.6383	0.6383	−0.6201	0.6464
1.240	−0.6179	0.6179	−0.6000	0.6260
1.260	−0.5984	0.5984	−0.5807	0.6066
1.280	−0.5799	0.5799	−0.5623	0.5880
1.300	−0.5622	0.5622	−0.5449	0.5703

对于轴对称厚、薄壁压力管外壁边界条件为自由、绝对刚性情况下，其应力与位移问题也可求解.



(a)厚壁圆管承受内压力



(b)压力管内外壁中的应力分布

图 4.9

4.10 空间弹性体的轴对称问题的状态方程

空间轴对称问题是指弹性体的几何形状、约束及承受外荷载等情

况对于某一固定轴线为对称的情况，弹性体内所产生的应力、应变与位移也都对称于该轴线. 在轴对称问题中，通常采用圆柱形坐标系 (r,θ,z)，如图 4.10 所示. 空间弹性体轴对称问题的控制方程有

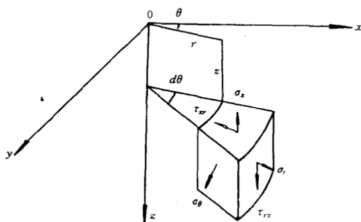


图 4.10　轴对称单元体

平衡方程

$$\underset{\sim}{L_1}\underset{\sim}{\sigma}+\underset{\sim}{F}=\underset{\sim}{0} \tag{4.10.1}$$

式中

$$\underset{\sim}{L_1}=\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\right) & -\dfrac{1}{r} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial}{\partial z} & \left(\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\right) \end{bmatrix} \tag{4.10.2}$$

$$\underset{\sim}{\sigma}=[\sigma_r \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \tau_{zr}]^T \tag{4.10.3}$$

$$\underset{\sim}{F}=[F_r \quad F_w]^T \tag{4.10.4}$$

几何方程

$$\underset{\sim}{\varepsilon}=\underset{\sim}{L_2^T}\,\underset{\sim}{u} \tag{4.10.5}$$

式中

$$\underset{\sim}{\varepsilon}=[\varepsilon_r \quad \varepsilon_\theta \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{zr}]^T \tag{4.10.6}$$

$$\underset{\sim}{L}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \tag{4.10.7}$$

$$\underset{\sim}{u} = [u_r \quad w]^T \tag{4.10.8}$$

物理方程

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{D}_s \underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{D}_s \underset{\sim}{L}_2^T \underset{\sim}{u} \tag{4.10.9}$$

式中

$$\underset{\sim}{D}_s = \begin{bmatrix} (\varphi + 2G) & \varphi & \varphi & 0 \\ \varphi & (\varphi + 2G) & \varphi & 0 \\ \varphi & \varphi & (\varphi + 2G) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \tag{4.10.10}$$

其中，弹性常数，φ 与 G 分别表示为

$$\varphi = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{4.10.11}$$

根据物理方程(4.10.9)中的第三式

$$\sigma_z = \varphi\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2G\frac{\partial w}{\partial z} \tag{4.10.12}$$

由上式，得

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{2G}\sigma_z - \frac{\varphi}{2G}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \\ &= \sigma_z \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} - \lambda\frac{\partial u_r}{\partial r} - \lambda\frac{u_r}{r} \end{aligned} \tag{4.10.13}$$

由物理方程(4.10.9)的第四式，有

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{\tau_{rz}}{G} - \frac{\partial w}{\partial r} \tag{4.10.14}$$

由物理方程(4.10.9)的第一、二式，并将式(4.10.13)代入其中，得

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (d\frac{\partial}{\partial r} + \mu\frac{d}{r}) & \lambda \\ (\mu d\frac{\partial}{\partial r} + \frac{d}{r}) & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ \sigma_z \end{Bmatrix} \tag{4.10.15}$$

式中

$$\lambda=\frac{\mu}{1-\mu},\quad d=\frac{E}{1-\mu^{2}} \tag{4.10.16}$$

现将式(4.10.16)代入式(4.10.1)中,得

$$\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}=-d\frac{\partial^{2}u_{r}}{\partial r^{2}}+\frac{d}{r^{2}}u_{r}-\frac{d}{r}\frac{\partial u_{r}}{\partial r}-\lambda\frac{\partial\sigma_{z}}{\partial r}-F_{r} \tag{4.10.17}$$

$$\frac{\partial\sigma_{z}}{\partial z}=-\frac{\partial\tau_{zr}}{\partial r}-\frac{\tau_{zr}}{r}-F_{z} \tag{4.10.18}$$

由式(4.10.13),(4.10.14),(4.10.17)与(4.10.18)得轴对称空间弹性体的状态方程为

$$\dot{\underset{\sim}{Z}}=\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{Z}+\underset{\sim}{F} \tag{4.10.19}$$

式中

$$\underset{\sim}{Z}=[u_{r}\quad\sigma_{z}\quad\tau_{zr}\quad w]^{T}$$

$$\dot{\underset{\sim}{Z}}=\frac{d\underset{\sim}{Z}}{\partial z} \tag{4.10.20}$$

$$\underset{\sim}{D}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{D}_{12}\\ \underset{\sim}{D}_{21} & \underset{\sim}{0}\end{bmatrix} \tag{4.10.21}$$

式中

$$\underset{\sim}{D}_{12}=\begin{bmatrix}\frac{1}{G} & -\frac{\partial}{\partial r}\\ -(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}) & 0\end{bmatrix} \tag{4.10.22}$$

$$\underset{\sim}{D}_{21}=\begin{bmatrix}-d(\frac{\partial^{2}}{\partial r^{2}}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^{2}}) & -\lambda\frac{\partial}{\partial r}\\ -\lambda(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}) & \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}\end{bmatrix} \tag{4.10.23}$$

$$\underset{\sim}{F}=[0\quad -F_{z}\quad -F_{r}\quad 0]^{T} \tag{4.10.24}$$

4.11 圆柱形坐标系内三维弹性力学的状态方程

上节，我们推导了空间弹性体的轴对称问题的状态方程. 本节，推导圆柱形坐标系内三维弹性力学的状态方程，为了求解空间轴对称问题，这里沿 z 方向展开，并讨论其解法及其应用.

在圆柱形坐标系内，三维体单元如图 4.11 所示. 三维弹性力学的控制方程有

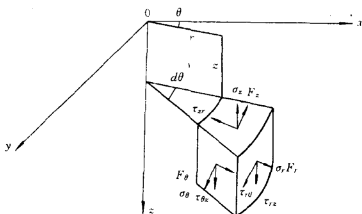


图 4.11 圆柱形坐标系内单元体

平衡方程

$$\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{\sigma}+\underset{\sim}{F}=\underset{\sim}{0} \tag{4.11.1}$$

式中，偏微分算子为

$$\underset{\sim}{L}=\begin{bmatrix} (\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}) & -\frac{1}{r} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & (\frac{\partial}{\partial r}+\frac{2}{r}) \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & (\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}) & 0 \end{bmatrix} \tag{4.11.2}$$

应力向量与体力向量分别为

$$\underset{\sim}{\sigma} = [\sigma_r \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \tau_{\theta z} \quad \tau_{zr} \quad \tau_{r\theta}]^T \tag{4.11.3}$$

$$\underset{\sim}{F} = [F_r \quad F_\theta \quad F_z]^T \tag{4.11.4}$$

几何方程

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{S}^T \underset{\sim}{u} \tag{4.11.5}$$

式中,偏微分算子为

$$\underset{\sim}{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & (\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}) \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.11.6}$$

应变向量与位移向量分别为

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = [\varepsilon_r \quad \varepsilon_\theta \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{\theta z} \quad \gamma_{zr} \quad \gamma_{r\theta}]^T \tag{4.11.7}$$

$$\underset{\sim}{u} = [u \quad v \quad w]^T \tag{4.11.8}$$

物理方程

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{D_e} \underset{\sim}{\varepsilon} \tag{4.11.9}$$

空间弹性体的弹性矩阵

$$\underset{\sim}{D_e} = \begin{bmatrix} \Phi(1-\mu) & \Phi\mu & \Phi\mu & & & \\ \Phi\mu & \Phi(1-\mu) & \Phi\mu & & \underset{\sim}{0} & \\ \Phi\mu & \Phi\mu & \Phi(1-\mu) & & & \\ & & & G & & \\ & & & & G & \\ \underset{\sim}{0} & & & & & G \end{bmatrix} \tag{4.11.10}$$

式中,弹性常数 Φ 与 G 见下式

$$\Phi = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}, G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{4.11.11}$$

将上式 $r\theta$ 面内的薄膜应力 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ 除外,余下的六个应力与位移分量

组成对偶变量，即应力分量$\tau_{\theta z},\tau_{zr},\sigma_z$与位移分量$u,v,w$，并将它们作为状态变量. 下面我们将三维弹性力学控制方程进行数学变换，导出状态方程.

由物理方程(4.11.9)与几何方程(4.11.5)展开，有

$$\sigma_z = \Phi\mu\frac{\partial u}{\partial r} + \Phi\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{u}{r}\right) + \Phi(1-\mu)\frac{\partial w}{\partial z} \tag{4.11.12}$$

由上式，得

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\Phi(1-\mu)}\left[\sigma_z - \Phi\mu\frac{\partial u}{\partial r} - \Phi\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{u}{r}\right)\right] \tag{4.11.13}$$

由物理方程与几何方程展开有

$$\sigma_r = \Phi(1-\mu)\frac{\partial u}{\partial r} + \Phi\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{u}{r}\right) + \Phi\mu\frac{\partial w}{\partial z} \tag{4.11.14}$$

$$\sigma_\theta = \Phi\mu\frac{\partial u}{\partial r} + \Phi(1-\mu)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{u}{r}\right) + \Phi\mu\frac{\partial w}{\partial z} \tag{4.11.15}$$

$$\tau_{r\theta} = G\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right) \tag{4.11.16}$$

将式(4.11.13)分别代入式(4.11.14)与式(4.11.15)，有

$$\sigma_r = d\frac{\partial u}{\partial r} + \mu d\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{u}{r}\right) + \lambda\sigma_z \tag{4.11.17}$$

$$\sigma_\theta = \mu d\frac{\partial u}{\partial r} + d\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{u}{r}\right) + \lambda\sigma_z \tag{4.11.18}$$

综合式(4.11.16)－(4.11.18)，有

$$\begin{Bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \tau_{r\theta}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\left(d\frac{\partial}{\partial r} + \mu d\frac{1}{r}\right) & \frac{\mu d}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} & \lambda\\ \left(\mu d\frac{\partial}{\partial r} + \frac{d}{r}\right) & \frac{d}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} & \lambda\\ \frac{G}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} & G\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\right) & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ v\\ \sigma_z\end{Bmatrix} \tag{4.11.19}$$

式中，d,λ详见式(4.10.16). 上式表示$r\theta$面内应力分量$\sigma_r,\sigma_\theta,\tau_{r\theta}$和位移分量$u,v$与应力分量$\sigma_z$之间的关系式.

根据平衡方程中的第一式，有

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} - F_r \tag{4.11.20}$$

将式(4.11.19)代入上式，得

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = -d\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{G}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{d}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{d}{r^2}u - \left(\frac{\mu d + G}{r}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r} + \left(\frac{\mu d + 3G}{r^2}\right)\frac{\partial v}{\partial \theta} - \lambda\frac{\partial \sigma_z}{\partial r} - F_r \tag{4.11.21}$$

同理，由平衡方程第二、三式，并将式(4.11.19)代入第二式，有

$$\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = -\frac{\mu d}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{G}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} - \frac{G+d}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} - G\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{G}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \left(\frac{d}{r^2}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{G}{r^2}v - \frac{\lambda}{r}\frac{\partial \sigma_z}{\partial \theta} - F_\theta \tag{4.11.22}$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\tau_{zr} - \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} - F_z \tag{4.11.23}$$

由式(4.11.12)，得

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}\sigma_z - \lambda\frac{\partial u}{\partial r} - \lambda\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}\right) \tag{4.11.24}$$

根据物理方程(4.11.9)中，$\tau_{\theta z}$，τ_{rz} 有

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau_{\theta z}}{G} - \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} \tag{4.11.25}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_{rz}}{G} - \frac{\partial w}{\partial r} \tag{4.11.26}$$

现综合式(4.11.21)－(4.11.26)，得状态方程为

$$\dot{\underset{\sim}{Z}} = \underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{Z} + \underset{\sim}{F} \tag{4.11.27}$$

式中，状态变量

$$\underset{\sim}{Z} = [u \quad v \quad \sigma_z \quad \tau_{rz} \quad \tau_{\theta z} \quad w]^T \tag{4.11.28}$$

$$\dot{\underset{\sim}{Z}} = \frac{d\underset{\sim}{Z}}{dz} \tag{4.11.29}$$

$$\underset{\sim}{D} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{D_1} \\ \underset{\sim}{D_2} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \tag{4.11.30}$$

其中

$$\underset{\sim}{D_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{G} & 0 & -\frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{1}{G} & -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ -(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}) & -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.11.31}$$

$$\underset{\sim}{D_2} =$$

$$\begin{bmatrix} (-d\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{G}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{d}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{d}{r^2}) & -(\frac{\mu d + G}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{\mu d + 3G}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}) & -\lambda\frac{\partial}{\partial r} \\ -(\frac{\mu d}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{G}{r}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} + \frac{G+d}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}) & -(G\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{G}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{d}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{G}{r^2}) & -\frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ -\lambda(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}) & -\frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} \end{bmatrix} \tag{4.11.32}$$

$$\underset{\sim}{F} = [0 \quad 0 \quad -F_z \quad -F_r \quad -F_\theta \quad 0]^T \tag{4.11.33}$$

对于轴对称空间体问题，则有，$v = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = \frac{\partial}{\partial \theta} = 0$，其状态方程退化如式(4.10.15)与式(4.10.19)：

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{Bmatrix} u \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \\ w \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} \multicolumn{2}{c:}{\underset{\sim}{0}} & \frac{1}{G} & -\frac{\partial}{\partial r} \\ & & -(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}) & 0 \\ \hdashline (-d\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{d}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{d}{r^2}) & -\lambda\frac{\partial}{\partial r} & \multicolumn{2}{c}{\underset{\sim}{0}} \\ -\lambda(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}) & \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} & & \end{array}\right]\begin{Bmatrix} u \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \\ w \end{Bmatrix}$$

$$
+\begin{Bmatrix} 0 \\ -F_z \\ -F_r \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (d\dfrac{\partial}{\partial r}+\mu\dfrac{d}{r}) & \lambda \\ (\mu d\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{d}{r}) & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \sigma_z \end{Bmatrix}
$$

上面推导了轴对称问题的状态方程. 下面通过一个固支圆板承受均布荷载的算例来具体阐明状态方程的求解过程. 设圆板的几何尺寸与物理常数如下: 圆板半径与厚度分别为 $a=1.0$, $h=0.1$, 物理常数为 $E=1.0$, $\mu=0.3$. 圆板承受的均布荷载 $q=1$ 如图 4.12 所示.

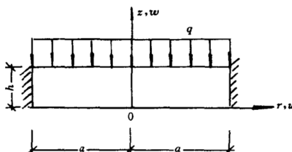


图 4.12 固支圆版承受均布荷载

假设圆板二类场函数为

$$
u_r=\bar{u}_r f'(r),\sigma_z=\bar{\sigma}_z f(r),\tau_{rz}=\bar{\tau}_{rz} f'(r),w=\bar{w} f(r) \tag{4.11.34}
$$

上式中的 $f(r)$ 函数应满足下式

$$
f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)+kf(r)=0 \tag{4.11.35}
$$

将式(4.11.34)代入式(4.10.19), 得

$$
\begin{Bmatrix} \dot{\bar{u}}_r \\ \dot{\bar{\sigma}}_z \\ \cdots \\ \dot{\bar{\tau}}_{rz} \\ \dot{\bar{w}} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} \multicolumn{2}{c:}{\underset{\sim}{0}} & \frac{1}{G} & -1 \\ & & k & 0 \\ \hdashline dk & -\lambda' & \multicolumn{2}{c}{} \\ \lambda k & \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} & \multicolumn{2}{c}{\underset{\sim}{0}} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \bar{u}_r \\ \bar{\sigma}_z \\ \cdots \\ \bar{\tau}_{rz} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} \tag{4.11.36}
$$

对固支板，取 $f(r)$ 函数为 $f(r)=(a^2-r^2)^2$，则 $\underset{\sim}{\bar{D}}$ 矩阵为

$$
\underset{\sim}{\bar{D}} = \left[\begin{array}{cc:cc} \multicolumn{2}{c:}{\underset{\sim}{0}} & 2.6 & -1 \\ & & 8 & 0 \\ \hdashline 8.8 & +0.4286 & \multicolumn{2}{c}{} \\ 3.4288 & 0.7429 & \multicolumn{2}{c}{\underset{\sim}{0}} \end{array}\right] \tag{4.11.37}
$$

状态方程为

$$
\dot{\underset{\sim}{\bar{Z}}} = \underset{\sim}{\bar{D}}\,\underset{\sim}{\bar{Z}} \tag{4.11.38}
$$

上述方程的解答如下

$$
\underset{\sim}{\bar{Z}}(z) = e^{\underset{\sim}{\bar{D}} z}\,\underset{\sim}{\bar{Z}}(0) \tag{4.11.39}
$$

应用圆板上下面的应力条件，即

$$
\underset{\sim}{\bar{Z}}(0) = [\bar{u}_r(o) \quad \bar{\sigma}_z(o) \quad \tau_{rz}(o) \quad \bar{w}(o)]^T
$$

$$
\underset{\sim}{\bar{Z}}(h) = [\bar{u}_r(h) \quad \bar{\sigma}_z(h) \quad \tau_{rz}(h) \quad \bar{w}(h)]^T
$$

得定解方程

$$
\underset{\sim}{\bar{D}}\,\underset{\sim}{u}(0) = \underset{\sim}{P} \tag{4.11.40}
$$

式中

$$
\underset{\sim}{u}(o) = [\bar{u}_r(0) \quad \bar{w}(o)]^T
$$

$$
\underset{\sim}{P} = [\bar{d}_{22}\,\bar{\sigma}_z(o)\ \bar{d}_{32}\,\bar{\sigma}_z(o)]^T \tag{4.11.41}
$$

$$
\underset{\sim}{\bar{D}} = \begin{bmatrix} \bar{d}_{21} & \bar{d}_{24} \\ \bar{d}_{31} & \bar{d}_{34} \end{bmatrix}
$$

根据式(4.11.40)解出$\underset{\sim}{u}(o)$值，由式(4.11.39)求得$\underset{\sim}{\bar{Z}}(z)$，再根据式(4.11.34)与式(4.10.15)求出位移与应力为$u_r,\sigma_z,\tau_{rz},w,\sigma_r$与$\sigma_\theta$. 圆板中心处应力与位移值的计算结果列于表4-9.

表4-9 圆板中心处位移与应力值

z \ $\underset{\sim}{Z}$	w	σ_z	$\sigma_r=\sigma_\theta$
0.00	−173.20	0	48.877
0.02	−173.60	−0.1041	29.185
0.04	−173.90	−0.3521	9.659
0.06	−173.90	−0.6479	−9.807
0.08	−173.70	−0.8959	−29.339
0.10	−173.20	−1.0000	−49.031
S. Timoshenko [25]	170.625		48.75

4.12 矩形厚、薄板的状态方程

薄板理论及其在工程上的应用，均具有十分重要的意义. 过去许多学者，如克希霍夫(G. R. Kirchhoff)，那维埃，(C. L. Navier)，李维(M. Levy)，铁木辛柯(S. Timoshenko)和张福范等作出了许多重要贡献. 60年代，由于有限元法的兴起，薄板的计算可通过有限程序在计算机上实施自动计算. 关于厚板问题的研究，过去几十年间，已有了许多工作，计算方法有多种，如有限元法、边界元法、样条元法等. 本节，基于三维弹性力学控制方程，导出矩形厚、薄板的状态方程. 随后研究其各种解法.

4.12.1 三维弹性力学控制方程[24]

三维弹性力学的静力学共有三套方程，它们是

平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+f_x=0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+f_y=0 \tag{4.12.1}$$
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+f_z=0$$

几何方程

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}$$
$$\gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4.12.2}$$

物理方程

$$\sigma_x=\varphi\theta+2G\varepsilon_x,\quad \tau_{yz}=G\gamma_{yz}$$
$$\sigma_y=\varphi\theta+2G\varepsilon_y,\quad \tau_{zx}=G\gamma_{zx} \tag{4.12.3}$$
$$\sigma_z=\varphi\theta+2G\varepsilon_z,\quad \tau_{xy}=G\gamma_{xy}$$

式中

$$\varphi=\frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$
$$\theta=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$
$$G=\frac{E}{2(1+\mu)}$$

4.12.2 基于三维弹性力学控制方程，导出矩形板的状态方程

将式(4.12.2)中的 ε_x 与 ε_y 代入式(4.12.3)中的 σ_x 与 σ_y，有

$$\sigma_x=\frac{\mu}{1+\mu}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)+2G\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\sigma_y=\frac{\mu}{1+\mu}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)+2G\frac{\partial v}{\partial y}$$

联立求解上式，得

$$\sigma_x=\lambda\sigma_z+d\frac{\partial u}{\partial x}+\mu d\frac{\partial v}{\partial y} \tag{4.12.4}$$

$$\sigma_y = \lambda\sigma_z + \mu d \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial v}{\partial y} \tag{4.12.5}$$

由物理方程(4.12.3)中的τ_{xy}及几何方程(4.12.2)γ_{xy}，得

$$\tau_{xy} = G \frac{\partial u}{\partial y} + G \frac{\partial v}{\partial x} \tag{4.12.6}$$

综合式(4.12.4)，(4.12.5)与(4.12.6)，有

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d \frac{\partial}{\partial x} & \mu d \frac{\partial}{\partial y} & \lambda \\ \mu d \frac{\partial}{\partial x} & d \frac{\partial}{\partial y} & \lambda \\ G \frac{\partial}{\partial y} & G \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \sigma_z \end{Bmatrix} \tag{4.12.7}$$

由平衡方程(4.12.1)中的第一式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - f_x \\ &= -\left(d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - (\mu d + G) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \lambda \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} - f_x \end{aligned} \tag{4.12.8}$$

式中

$$d = \frac{E}{1-\mu^2}, \quad \lambda = \frac{\mu}{1-\mu}$$

由平衡方程的第二式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - f_y \\ &= -(G + \mu d) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(d \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) - \lambda \frac{\partial \sigma_z}{\partial y} - f_y \end{aligned} \tag{4.12.9}$$

由物理方程中的σ_z和几何方程中的ε_z以及物理方程式中的τ_{yz}和τ_{zx}，得

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} \sigma_z - \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{4.12.10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{G} \tau_{yz} - \frac{\partial w}{\partial y} \tag{4.12.11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{G}\tau_{zx}-\frac{\partial w}{\partial x} \tag{4.12.12}$$

由平衡方程的第三式，得

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=-\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}-\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}-f_z \tag{4.12.13}$$

综合式(4.12.8)—(4.12.13)，得方程为

$$\dot{\underset{\sim}{Z}}=\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{Z}+\underset{\sim}{F} \tag{4.12.14}$$

式中

$$\underset{\sim}{Z}=[u \quad v \quad \sigma_z \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \quad w]^T \tag{4.12.15}$$

$$\dot{\underset{\sim}{Z}}=\frac{\partial \underset{\sim}{Z}}{\partial z}$$

$$\underset{\sim}{F}=[0 \quad 0 \quad -f_z \quad -f_x \quad -f_y \quad 0]^T \tag{4.12.16}$$

$$\underset{\sim}{D}=\begin{bmatrix} \underset{\sim}{D}_{11} & \underset{\sim}{D}_{12} \\ \underset{\sim}{D}_{21} & \underset{\sim}{D}_{22} \end{bmatrix} \tag{4.12.17}$$

$$\underset{\sim}{D}_{12}=\begin{bmatrix} \frac{1}{G} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{1}{G} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{D}_{11}=\underset{\sim}{D}_{22}=\underset{\sim}{0} \tag{4.12.18}$$

$$\underset{\sim}{D}_{21}=\begin{bmatrix} -\left(d\frac{\partial^2}{\partial x^2}+G\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) & -(\mu d+G)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & -\lambda\frac{\partial}{\partial x} \\ -(G+\mu d)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} & -\left(d\frac{\partial^2}{\partial y^2}+G\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) & -\lambda\frac{\partial}{\partial y} \\ -\lambda\frac{\partial}{\partial x} & -\lambda\frac{\partial}{\partial y} & \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} \end{bmatrix} \tag{4.12.19}$$

式(4.12.14)称矩形板的状态方程，而$\underset{\sim}{Z}$称为板的状态变量.

4.13 分离变量法解简支厚、薄矩形板的弯曲

上节导出的矩形板的状态方程，它具有可分离的数学结构，因此可采用直接积分求得板的状态变量. 根据简支板的特点，如图 4.13，我们

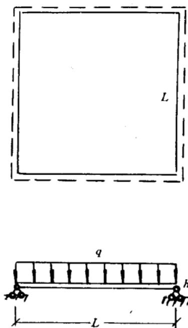


图 4.13

可以采用三角函数来构造二类场函数如下：

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{u}(z)\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\tau_{zx}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\tau}_{zx}(z)\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$v=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{v}(z)\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$$

$$\tau_{zy}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\tau}_{zy}(z)\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$$

$$\sigma_z=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\sigma}_z(z)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{w}(z)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (4.13.1)$$

其中，$\bar{u}_{mn}(z)$，$\bar{\tau}_{zxmn}(z)$，…，均简写为 $\bar{u}(z)$，$\bar{\tau}_{zx}(z)$，…，将式(4.13.1)代入式(4.12.14)中，得

$$\dot{\underset{\sim}{\bar{Z}}}=\underset{\sim}{\bar{D}}\,\underset{\sim}{\bar{Z}},\quad \dot{\underset{\sim}{\bar{Z}}}=\frac{\partial\underset{\sim}{\bar{Z}}}{\partial z} \qquad (4.13.2)$$

其中

$$\underset{\sim}{\bar{Z}}=[\bar{u}(z)\quad \bar{v}(z)\quad \bar{\sigma}_z(z)\quad \bar{\tau}_{zx}(z)\quad \bar{\tau}_{zy}(z)\quad \bar{w}(z)]^T \qquad (4.13.3)$$

$$\underset{\sim}{\bar{D}}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\bar{D}_{11}} & \underset{\sim}{\bar{D}_{12}}\\ \underset{\sim}{\bar{D}_{21}} & \underset{\sim}{\bar{D}_{22}}\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\bar{D}_{11}}=\underset{\sim}{\bar{D}_{22}}=\underset{\sim}{0}$$

$$\underset{\sim}{\bar{D}_{12}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{G} & 0 & -\frac{m\pi}{a}\\ 0 & \frac{1}{G} & -\frac{n\pi}{b}\\ \frac{m\pi}{a} & \frac{n\pi}{b} & 0\end{bmatrix} \qquad (4.13.4)$$

$$\underset{\sim}{\bar{D}_{21}}=\begin{bmatrix}d(\frac{m\pi}{a})^2+G(\frac{n\pi}{b})^2 & (\mu d+G)\frac{m\pi}{a}\cdot\frac{n\pi}{b} & -\lambda\frac{m\pi}{a}\\ (\mu d+G)\frac{n\pi}{b}\cdot\frac{m\pi}{a} & G(\frac{m\pi}{a})^2+d(\frac{n\pi}{b})^2 & -\lambda\frac{n\pi}{b}\\ \frac{\mu}{1-\mu}\cdot\frac{m\pi}{a} & \frac{\mu}{(1-\mu)}\cdot\frac{n\pi}{b} & \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}\end{bmatrix}$$

$$(4.13.5)$$

状态方程(4.13.2)的解答为

$$\bar{\underset{\sim}{Z}}(z) = e^{\underset{\sim}{\bar{D}}z}\bar{\underset{\sim}{Z}}(0) \tag{4.13.6}$$

其中

$$e^{\underset{\sim}{\bar{D}}z} = \underset{\sim}{I} + \sum_{n=1}^{\infty}\underset{\sim}{\bar{D}}^{n}\frac{z^{n}}{n!} \tag{4.13.7}$$

$$\bar{\underset{\sim}{Z}}(0) = [\bar{u}(0) \quad \bar{v}(0) \quad \bar{\sigma}_{z}(0) \quad \bar{\tau}_{zx}(0) \quad \bar{\tau}_{zy}(0) \quad \bar{w}(0)]^{T} \tag{4.13.8}$$

在求解时，还需要将边界面的荷载展成三角级数，即

$$\begin{aligned} q_{mn} &= \frac{4}{ab}\int_{0}^{a}\int_{0}^{b} q\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy \\ &= \frac{16q}{mn\pi^{2}}(m = n = 1,3,5,\cdots) \end{aligned} \tag{4.13.9}$$

根据式(4.13.6)引入板面的位移与应力的边界条件，板在均布荷载q_0作用下，可得定解方程

$$\underset{\sim}{\bar{D}_{0}}\underset{\sim}{\bar{Z}}(0) = \underset{\sim}{P} \tag{4.13.10}$$

式中

$$\underset{\sim}{\bar{D}_{0}} = \begin{bmatrix} \bar{d}_{31} & \bar{d}_{32} & \bar{d}_{36} \\ \bar{d}_{41} & \bar{d}_{42} & \bar{d}_{46} \\ \bar{d}_{51} & \bar{d}_{52} & \bar{d}_{56} \end{bmatrix} \tag{4.13.11}$$

$$\bar{\underset{\sim}{Z}}(0) = [\bar{u}(0) \quad \bar{v}(0) \quad \bar{w}(0)]^{T}, \quad \underset{\sim}{P} = [\bar{d}_{33} \quad \bar{d}_{43} \quad \bar{d}_{53}]\frac{16q}{mn\pi^{2}} \tag{4.13.12}$$

由式(4.13.10)解出$\bar{\underset{\sim}{Z}}(0)$后，将其代入式(4.13.6)求得$\bar{\underset{\sim}{Z}}(z)$，再由式(4.13.1)求出$\underset{\sim}{Z}(z)$，并将其代入式(4.12.7)，最后求得矩形板的全部应力与位移，即$\underset{\sim}{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T$与$\underset{\sim}{u} = [u \quad v \quad w]^T$.

4.14 基于状态空间理论的多变量样条有限元法

上节介绍的内容是属于厚、薄板分析的一种精确解法. 在那里，不管对薄板还是厚板(包括中厚板与深厚板)均可以求解，而且不作任何

位移与应力的假设，因此，状态空间法比传统方法要优越. 本节，我们介绍一种基于状态空间理论的样条有限元法. 在上一节里，我们采用三角函数来构造应力与位移的场函数，可解矩形板的弯曲问题. 本节，我们采用样条插值函数来构造应力与位移的二类场函数，建立状态样条有限元法.

4.14.1 基于二类变量广义变分原理的板的状态方程

上节，我们介绍了基于三维弹性力学控制方程，导出了矩形板的状态方程，并给出了矩形板弯曲问题的状态方程的解析解法. 本节，我们采用样条插值函数来构造多变量场函数，通过二类变量广义变分原理来建立矩形板的状态方程，并研究其解法.

将三维弹性力学中的应力分量与位移分量分成二组，一组为薄膜应力分量为 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$；另一组应力分量与位移分量为 $\sigma_z,\tau_{zx},\tau_{zy}$ 与 u,v,w. 取对偶变量，$\underset{\sim}{p}=[\tau_{zx}\ \tau_{zy}\ \sigma_z]^T$ 与 $\underset{\sim}{q}=[u\quad v\quad w]^T$ 为状态变量，建立以状态变量为自变函数的二类变量的泛函数.

根据文献[22]，弹性力学中的二类变量广义泛函数为

$$
\begin{aligned}
\Pi_{2p}=&\int_{\Omega}\underset{\sim}{\sigma}^T\underset{\sim}{L}^T\underset{\sim}{u}\,d\Omega-\int_{\Omega}\frac{1}{2}\underset{\sim}{\sigma}^T\underset{\sim}{D}_e^{-1}\underset{\sim}{\sigma}\,d\Omega-\int_{\Omega}\underset{\sim}{f}^T\underset{\sim}{u}\,d\Omega\\
&-\int_{S_\sigma}\bar{\underset{\sim}{p}}^T\underset{\sim}{u}\,ds-\int_{S_u}\underset{\sim}{p}^T(\underset{\sim}{u}-\bar{\underset{\sim}{u}})ds
\end{aligned}
\tag{4.14.1}
$$

式中

$$\underset{\sim}{\sigma}=[\sigma_x\quad\sigma_y\quad\sigma_z\quad\tau_{yz}\quad\tau_{zx}\quad\tau_{xy}]^T \tag{4.14.2}$$

$$\underset{\sim}{u}=[u\quad v\quad w]^T,\underset{\sim}{f}=[f_x\quad f_y\quad f_z]^T \tag{4.14.3}$$

$$\underset{\sim}{p}=[p_x\quad p_y\quad p_z]^T \tag{4.14.4}$$

$$\underset{\sim}{L}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\end{bmatrix} \tag{4.14.5}$$

$$
\underset{\sim}{D_e} = D_e \left[\begin{array}{ccc:ccc}
1 & & & & & \\
\frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & \text{对称} & \\
\frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & & & \\
\hdashline
 & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & & \\
 & \underset{\sim}{0} & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & \\
 & & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}
\end{array}\right]
\tag{4.14.6}
$$

其中

$$
D_e = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}
$$

容易论证：根据弹性力学二类变量广义变分原理[22]，就可以得到其欧拉方程，即一套为弹性体内及其边界上的平衡方程

$$
\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{\sigma} + \underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{0}, \quad \underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\bar{p}} \tag{4.14.7}
$$

另一套为弹性体内及其边界上的几何方程

$$
\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{L}^T \underset{\sim}{u}, \quad \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{\bar{u}} \tag{4.14.8}
$$

式中 $\underset{\sim}{\varepsilon}$ 为弹性体的应变分量

$$
\underset{\sim}{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{zy} \quad \gamma_{zx} \quad \gamma_{xy}]^T \tag{4.14.9}
$$

$\underset{\sim}{E}$ 为 方向余弦矩阵

$$
\underset{\sim}{E} = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & 0 & n & m \\ 0 & m & 0 & n & 0 & l \\ 0 & 0 & n & m & l & 0 \end{bmatrix} \tag{4.14.10}
$$

其中

$$
l = \cos(x\ N), m = \cos(y\ N), n = \cos(z\ N)
$$

现将式(4.12.7)代入式(4.14.1)，消去薄膜应力之后，取关于状态变量的泛函数变分为零，即得矩形板的状态方程(4.12.14)—(4.12.19)。

4.14.2 状态样条有限元法方程

为了导出状态样条有限元法的方程，下面应用样条插值函数来构造状态变量函数，即

$$
\begin{aligned}
u &= \underset{\sim}{\Phi}(x,y)\underset{\sim}{\Gamma}_1 = \underset{\sim}{\Phi}(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}(y)\underset{\sim}{\Gamma}_1 \\
&\cdots\cdots \\
\tau_{zx} &= \underset{\sim}{\Phi}(x,y)\underset{\sim}{\Gamma}_5 = \underset{\sim}{\Phi}(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}(y)\underset{\sim}{\Gamma}_5 \\
w &= \underset{\sim}{\Phi}(x,y)\underset{\sim}{\Gamma}_6 = \underset{\sim}{\Phi}(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}(y)\underset{\sim}{\Gamma}_6
\end{aligned}
\tag{4.14.11}
$$

式中，$\underset{\sim}{\Phi}(x)$ 与 $\underset{\sim}{\Phi}(y)$ 为多点样条函数

$$
\underset{\sim}{\Phi}(x) = [\varphi_{-1}(x) \quad \varphi_0(x) \quad \varphi_1(x) \cdots \varphi_i(x) \cdots \varphi_{n-1}(x) \quad \varphi_n(x) \quad \varphi_{n+1}(x)]
$$

样条函数的具体表达式可详见第一章有关内容. $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_6$ 为样条参数，它们是待定常数.

现将式(4.14.11)代入以状态变量为自变函数的二类变量泛函中，并取关于状态变量的泛函驻值，即得矩形板的状态方程如下：

$$
\dot{\underset{\sim}{\Gamma}} = \underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{\Gamma} + \underset{\sim}{P} \tag{4.14.12}
$$

式中

$$
\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{a}^{-1}(\underset{\sim}{D}_\Omega + \underset{\sim}{D}_s) \tag{4.14.13}
$$

$$
\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{a}^{-1}\underset{\sim}{F} \tag{4.14.14}
$$

$$
\underset{\sim}{\Gamma} = [\underset{\sim}{\Gamma}_1 \quad \underset{\sim}{\Gamma}_2 \quad \cdots \quad \underset{\sim}{\Gamma}_6]^T \tag{4.14.15}
$$

$$
\underset{6\times 6}{\underset{\sim}{D}_\Omega} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{D}_1 \\ \underset{\sim}{D}_2 & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \tag{4.14.16}
$$

其中

$$
\underset{3\times 3}{\underset{\sim}{D_1}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{G}\underset{\sim}{A_x^{00}} \otimes \underset{\sim}{A_y^{00}} & \underset{\sim}{0} & -\lambda \underset{\sim}{A_x^{01}} \otimes \underset{\sim}{A_y^{00}} \\ \underset{\sim}{0} & \frac{1}{G}\underset{\sim}{A_x^{00}} \otimes \underset{\sim}{A_y^{00}} & -\lambda \underset{\sim}{A_x^{00}} \otimes \underset{\sim}{A_y^{01}} \\ \lambda \underset{\sim}{A_x^{01}} \otimes \underset{\sim}{A_y^{00}} & \lambda \underset{\sim}{A_x^{00}} \otimes \underset{\sim}{A_y^{01}} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \tag{4.14.17}
$$

$$
\underset{3\times 3}{\underset{\sim}{D_2}} = \begin{bmatrix} (d\underset{\sim}{A_x^{11}} \otimes \underset{\sim}{A_y^{00}} + G\underset{\sim}{A_x^{00}} \otimes \underset{\sim}{A_y^{11}}) & (\mu d + G)\underset{\sim}{A_x^{10}} \otimes \underset{\sim}{A_y^{10}} & -\lambda \underset{\sim}{A_x^{01}} \otimes \underset{\sim}{A_y^{00}} \\ (\mu d + G)\underset{\sim}{A_x^{10}} \otimes \underset{\sim}{A_y^{10}} & (G\underset{\sim}{A_x^{11}} \otimes \underset{\sim}{A_y^{00}} + d\underset{\sim}{A_x^{00}} \otimes \underset{\sim}{A_y^{11}}) & -\lambda \underset{\sim}{A_x^{00}} \otimes \underset{\sim}{A_y^{10}} \\ \lambda \underset{\sim}{A_x^{10}} \otimes \underset{\sim}{A_y^{00}} & \lambda \underset{\sim}{A_x^{00}} \otimes \underset{\sim}{A_y^{01}} & \frac{(1-\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}\underset{\sim}{A_x^{00}} \otimes \underset{\sim}{A_y^{00}} \end{bmatrix} \tag{4.14.18}
$$

$$
\underset{6\times 6}{\underset{\sim}{a}} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A_x^{00}} \otimes \underset{\sim}{A_y^{00}} & & \underset{\sim}{0} \\ & \ddots & \\ \underset{\sim}{0} & & \underset{\sim}{A_x^{00}} \otimes \underset{\sim}{A_y^{00}} \end{bmatrix} \tag{4.14.19}
$$

$$
\underset{\sim}{A^{ij}} = \int_0^L \underset{\sim}{\Phi^T}(x)\underset{\sim}{\Phi^j}(x)dx \qquad (x,y,i,j = 0,1,2) \tag{4.14.20}
$$

式中，$\underset{\sim}{D_0}$，$\underset{\sim}{a}$ 均为 6×6 子块阵，$\underset{\sim}{D_1}$，$\underset{\sim}{D_2}$ 均为 3×3 子块阵. $\underset{\sim}{F}=\underset{\sim}{F_1}+\underset{\sim}{F_2}$.

在式(4.14.13)中的矩阵 $\underset{\sim}{D_s}$ 是与侧边的位移边界条件有关，式(4.14.14)中的 $\underset{\sim}{F}$ 列阵是与侧边的力的边界条件有关.

在矩形板的侧边，$x=0$，$x=a$ 与 $y=0$，$y=b$ 处，若作用有力 $\overline{p}_x(z)$，$\overline{p}_y(z)$，$\overline{p}_z(z)$时，则 $\underset{\sim}{F}$列阵中有

$$
\underset{\sim}{F_1} = [\underset{\sim}{0} \quad \underset{\sim}{0} \quad \int_{S_\sigma} \underset{\sim}{\Phi^T}(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi^T}(y)\overline{p}_z ds \quad \int_{S_\sigma} \underset{\sim}{\Phi^T}(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi^T}(y)\overline{p}_x ds \quad \int_{S_\sigma} \underset{\sim}{\Phi^T}(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi^T}(y)\overline{p}_y ds \quad \underset{\sim}{0}]^T \tag{4.14.21}
$$

在上述边界面上，若有位移 $\overline{u}(z)$，$\overline{v}(z)$，$\overline{w}(z)$ 作用时，对于特殊情况：$\overline{u}(z)=\overline{v}(z)=\overline{w}(z)=0$ 时，可以在系统方程直接引入位移条件；另一种做法，可以应用变分方法来推导出对系统方程的贡献. 其次，上述已知位移引起非齐次项 $\underset{\sim}{F_2}$. 若边界上无位移，则无贡献. 以上，我们讨论

了矩形板侧边的边界条件问题. 下面，我们来讨论矩形板上下面的边界条件，对 $z=0,h$ 的板面，力的边界条件为：$\underset{\sim}{p}(x,y,0)=\bar{\underset{\sim}{p}}(x,y,0)$，$p(x,y,h)=p(x,y,h)$；对位移的边界条件为 $\underset{\sim}{u}(x,y,0)=\bar{u}(x,y,0)$，$\underset{\sim}{u}(x,y,h)=u(x,y,h)$.

以上，我们讨论了基于状态空间理论的样条有限元法的计算格式. 对于矩形板的状态变量，共有 6 个，其中 3 个应力分量 $\sigma_z,\tau_{zx},\tau_{zy}$ 和 3 个位移分量 u,v,w. 当这些未知量求出后，再应用式(4.12.7)即可求得另外三个未知应力分量 $\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}$，这样就求得了矩形板的全部应力与位移量共 9 个. 在具体求解时，先对矩形板进行网格剖分，若取 4×4，6×6，8×8 等网格，由式(4.14.12)需求解样条参数的数目分别为 294，486，726. 应用状态样条有限元法求解矩形板问题时，直接建立整体状态方程，无需进行单元集合. 由于样条插值函数具有解析与数值的双重特性，待定参数少，逼近精度高，连续性强，再由于独立设置各类场函数，因此，对于各种应力与位移均有较高的计算精度.

4.15 数值算例

根据上面的计算公式，我们编制了计算程序. 下面给出一个四边简

表 4-10 四边简支矩形板弯曲的应力与位移值

h	0	0.025	0.05	0.075	0.1	S. Timoshenko[25]
u	−6.7933	−3.3200	0.0482	3.4116	6.8647	
v	−6.7933	−3.3200	0.0482	3.4116	6.8647	
w	45.3331	45.6442	45.7331	45.6054	45.2545	44.3352
σ_z	−1.0	−0.8496	−0.5186	−0.1806	0.0	
τ_{zx}	0.0	2.7867	3.7087	2.7867	0.0	
τ_{zy}	0.0	2.7867	3.7087	2.7867	0.0	3.8770
σ_x	30.9170	14.5359	0.0061	14.5359	30.9170	32.0298
σ_y	30.9170	14.5359	0.0061	14.5359	30.9170	32.0298
τ_{xy}	16.4167	8.0231	0.1080	8.6231	16.4167	17.2467

支矩形板的弯曲问题的数值结果. 板的计算数据：$a=b=1.0$，$h=0.1$，$E=1.0$，$\mu=0.3$，$q=1.0$. 数值结果列于表 4-10. 其中，S. Timoshenko 解，位移为精确解，应力解只取一项级数解.

4.16 圆柱壳弯曲的控制方程及其二类变量广义变分原理

圆柱形壳体在建筑工程、高压容器，原子能电站及航空工程等领域中有广泛应用. 由于圆柱壳的控制方程是一组高阶偏微分方程，其边值问题的解析解一般是十分困难的.

本节，我们简要地介绍一下圆柱壳的控制方程及其二类变量广义变分原理. 随后，介绍圆柱壳的状态方程及其解法.

在圆柱形的坐标系下，如图 4.14 所示圆柱壳单元，其控制方程有三套：

平衡方程

$$\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{\sigma}+\underset{\sim}{F}=\underset{\sim}{0} \tag{4.16.1}$$

式中，偏微分算子为

$$\underset{\sim}{L}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & (\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r}) & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} \\ 0 & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} & 0 & (\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{2}{r}) & 0 & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -\dfrac{1}{r} & (\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r}) & \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.16.2}$$

应力向量与体力向量分别为

$$\underset{\sim}{\sigma}=[\sigma_x\quad \sigma_\theta\quad \sigma_r\quad \tau_{r\theta}\quad \tau_{rx}\quad \tau_{\theta x}]^T \tag{4.16.3}$$

$$\underset{\sim}{F}=[F_x\quad F_\theta\quad F_r]^T \tag{4.16.4}$$

物理方程

$$\underset{\sim}{\sigma}=\underset{\sim}{D_e}\,\underset{\sim}{\varepsilon} \tag{4.16.5}$$

式中，$\underset{\sim}{D_e}$ 为圆柱壳的弹性矩阵

$$\underset{\sim}{D}_e = \begin{bmatrix} \varphi(1-\mu) & \varphi\mu & \varphi\mu & & & \\ \varphi\mu & \varphi(1-\mu) & \varphi\mu & \underset{\sim}{O} & & \\ \varphi\mu & \varphi\mu & \varphi(1-\mu) & & & \\ & & & G & & \\ & & & & G & \\ & \underset{\sim}{O} & & & & G \end{bmatrix} \tag{4.16.6}$$

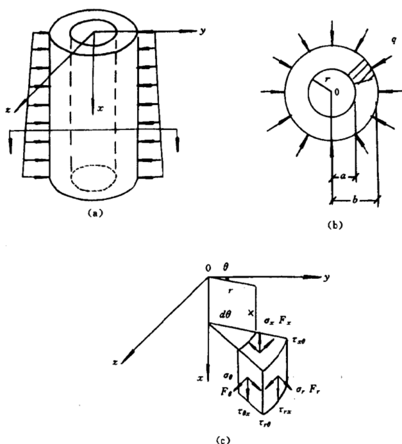


图 4.14　圆柱形坐标系内三维体单元

式中，弹性常数φ与G分别见式(4.11.11).

几何方程

$$\underset{\sim}{\varepsilon}=\underset{\sim}{S}^T\underset{\sim}{u} \tag{4.16.7}$$

式中

$$\underset{\sim}{\varepsilon}=[\varepsilon_x \quad \varepsilon_\theta \quad \varepsilon_r \quad \gamma_{r\theta} \quad \gamma_{rx} \quad \gamma_{x\theta}]^T \tag{4.16.8}$$

$$\underset{\sim}{u}=[u \quad v \quad w]^T \tag{4.16.9}$$

其中，偏微分算子

$$\underset{\sim}{S}=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \\ 0 & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} & 0 & (\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}) & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{1}{r} & \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.16.10}$$

此外，在位移边界上，给定位移分量$\underset{\sim}{u}=\bar{\underset{\sim}{u}}$；在应力边界上，给定面力分量$\underset{\sim}{p}=\bar{\underset{\sim}{p}}$. 这组控制方程包括有6个应力分量，6个应变分量与3个位移分量，共有15个未知函数，连同边界条件，原则上，可求解这套方程组. 但要用精确法求解这套圆柱壳控制方程，一般有较大困难. 为了求得其近似解，可通过变分原理来求解，例如，可以构造出圆柱壳的总势能泛函，总余能泛函以及二、三类变量的广义势能泛函等，再假设位移场、应力场等函数，然后通过泛函的极值或驻值原理而求出其近似解. 也可以通过变分原理建立数值方法如有限元位移法、有限元力法、混合有限元法、杂交有限元法等[33-36]. 为了导出圆柱壳的状态方程，需要用到圆柱壳的二类变量广义变分原理.

根据圆柱形坐标系的三维弹性力学的二类变量广义势能原理：

$$\delta\Pi_{S2}=\underset{\sim}{0}$$

式中

$$\Pi_{S2}=\int_{\Omega}\underset{\sim}{\sigma}^T\underset{\sim}{S}^T\underset{\sim}{u}\,d\Omega-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\underset{\sim}{\sigma}^T\underset{\sim}{D}_\varepsilon^{-1}\underset{\sim}{\sigma}\,d\Omega-\int_{\Omega}\underset{\sim}{F}^T\underset{\sim}{u}\,d\Omega$$
$$-\int_{S_u}\underset{\sim}{p}^T(\underset{\sim}{u}-\bar{\underset{\sim}{u}})ds-\int_{S_\sigma}\bar{\underset{\sim}{p}}^T\underset{\sim}{u}\,ds \tag{4.16.11}$$

式中的应力向量 $\underset{\sim}{\sigma}$，位移向量 $\underset{\sim}{u}$ 及体力向量 $\underset{\sim}{F}$，详见式(4.16.3)，(4.16.4)与(4.16.9)所示. 根据二类变量广义变分原理，即 $\delta\Pi_{S2} = \underset{\sim}{0}$，可获得圆柱壳的平衡方程(4.16.1)，几何方程(4.16.7)以及力与位移的边界条件.

4.17 圆柱壳的状态方程及其解法

根据圆柱壳的物理方程(4.16.5)，(4.16.6)与几何方程(4.16.8)，有

$$\sigma_x = \varphi(1-\mu)\frac{\partial u}{\partial x} - \varphi\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r}\right) + \varphi\mu\frac{\partial w}{\partial r} \quad (4.17.1)$$

$$\sigma_\theta = \varphi\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi(1-\mu)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r}\right) + \varphi\mu\frac{\partial w}{\partial r} \quad (4.17.2)$$

$$\tau_{x\theta} = G\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \quad (4.17.3)$$

$$\sigma_r = \varphi\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \varphi\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r}\right) + \varphi(1-\mu)\frac{\partial w}{\partial r} \quad (4.17.4)$$

由上式，得

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{\varphi(1-\mu)}\left[-\varphi\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \varphi\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r}\right) + \sigma_r\right] \quad (4.17.5)$$

将式(4.17.5)代入式(4.17.1)和(4.17.2)，有

$$\sigma_x = d\frac{\partial u}{\partial x} + \mu d\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \mu d\frac{w}{r} + \lambda\sigma_r \quad (4.17.6)$$

$$\sigma_\theta = \mu d\frac{\partial u}{\partial x} + d\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + d\frac{w}{r} + \lambda\sigma_r \quad (4.17.7)$$

综合式(4.17.3)，(4.17.6)与(4.17.7)，组成下式

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d\frac{\partial}{\partial x} & \frac{d\mu}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & \lambda & \frac{\mu d}{r} \\ \mu d\frac{\partial}{\partial x} & \frac{d}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & \lambda & \frac{d}{r} \\ \frac{G}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & G\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \sigma_r \\ w \end{Bmatrix} \quad (4.17.8)$$

式中，d，λ 详见式(4.10.16).

上式表示 $x\theta$ 面内应力分量和三个位移分量 u,v,w 与径向应力分量 σ_r 之间的关系式. 将 $x\theta$ 面内应力分量 $\sigma_x,\sigma_\theta,\tau_{x\theta}$ 除外，余下的圆柱壳内应力分量与位移分量组成对偶变量，即($\sigma_r,\tau_{r\theta},\tau_{rx},u,v,w$) 称状态变量. 将式(4.17.8) 代入式(4.16.11)，组成以状态变量为自变函数的新泛函数 Π_{S2}^*. 根据泛函 Π_{S2}^* 的驻值条件，我们有

$$\frac{\partial \Pi_{S2}^*}{\partial \tau_{rx}} = \frac{\partial \Pi_{S2}^*}{\partial \tau_{r\theta}} = \frac{\partial \Pi_{S2}^*}{\partial w} = \frac{\partial \Pi_{S2}^*}{\partial u} = \frac{\partial \Pi_{S2}^*}{\partial v} = \frac{\partial \Pi_{S2}^*}{\partial \sigma_r} = \underset{\sim}{0} \quad (4.17.9)$$

得圆柱壳的状态方程如下：

$$\dot{\underset{\sim}{Q}} = \underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{Q} + \underset{\sim}{F} \quad (4.17.10)$$

式中

$$\underset{\sim}{Q} = [u \quad v \quad \sigma_r \quad \tau_{rx} \quad \tau_{r\theta} \quad w]^T \quad (4.17.11)$$

$$\dot{\underset{\sim}{Q}} = \frac{\partial \underset{\sim}{Q}}{\partial r} \quad (4.17.12)$$

$$\underset{\sim}{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & \frac{1}{G} & -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\mu d}{r}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{d}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{1-2\mu}{1-\mu}\frac{1}{r} & -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{d}{r^2} \\ (-d\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{G}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}) & -(\frac{\mu d}{r} + \frac{G}{r})\frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} & -\lambda\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{r} & 0 & -\frac{\mu d}{r}\frac{\partial}{\partial x} \\ -(\frac{G}{r} + \frac{\mu d}{r})\frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} & -(\frac{d}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + G\frac{\partial^2}{\partial x^2}) & -\frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & -\frac{2}{r} & -\frac{d}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ -\lambda\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\lambda}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{r} \end{bmatrix} \quad (4.17.13)$$

$$\underset{\sim}{F} = [0 \quad 0 \quad -F_r \quad -F_x \quad -F_\theta \quad 0]^T \quad (4.17.14)$$

位移边界条件 $\underset{\sim}{u} = \bar{\underset{\sim}{u}}$ (4.17.15)

应力边界条件 $\underset{\sim}{p} = \bar{\underset{\sim}{p}}$

其中 $\bar{\underset{\sim}{p}} = [\bar{p}_r \quad \bar{p}_\theta \quad \bar{p}_x]^T$ (4.17.16)

方程(4.17.10)的求解，要涉及到如何构造对偶场函数的问题. 一

般说来，除对简单边界情况外，要构造适合边界条件的场函数，将是十分困难的，即使能构造出来，函数复杂，$\underset{\sim}{D}$ 矩阵的计算也较困难. 值得注意方程(4.17.10)中的矩阵 $\underset{\sim}{D}$ 是 r 的函数，且还有微分算子，因此必需要构造好场函数后，才能进行求解. 为了求得精度较高的应力与位移分布，我们将结构的厚壁层划分为若干薄层，建立各薄层的状态方程. 设将图示圆柱壳沿 r 方向划分为 S 个薄层如图 4.15 所示.

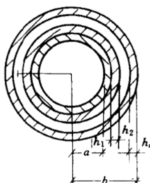


图 4.15　多层圆柱形壳截面

对于第 1,2,…,S 层，若不考虑体力与表面力，其状态方程分别为

$$
\begin{aligned}
&\dot{\underset{\sim}{Q}}_1(r) = \underset{\sim}{D}_1(\bar{r}_1)\underset{\sim}{Q}_1(r) && a \leqslant r \leqslant (a+h_1) \\
&\dot{\underset{\sim}{Q}}_2(r) = \underset{\sim}{D}_2(\bar{r}_2)\underset{\sim}{Q}_2(r) && (a+h_1) \leqslant r \leqslant (a+h_1+h_2) \\
&\qquad\vdots && \qquad\vdots \\
&\dot{\underset{\sim}{Q}}_S(r) = \underset{\sim}{D}_S(\bar{r}_S)\underset{\sim}{Q}_S(r) && (b-h_s) \leqslant r \leqslant b
\end{aligned}
\tag{4.17.17}
$$

上式的解答分别为

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{Q}_1(a+h_1) &= \underset{\sim}{\varphi}_1\underset{\sim}{Q}_1(a), \quad \underset{\sim}{\varphi}_1 = e^{\underset{\sim}{D}_1(\bar{r}_1)h_1} \\
\underset{\sim}{Q}_2(a+h_1+h_2) &= \underset{\sim}{\varphi}_2\underset{\sim}{Q}_2(a+h_1), \quad \underset{\sim}{\varphi}_2 = e^{\underset{\sim}{D}_2(\bar{r}_2)h_2} \\
&\vdots \\
\underset{\sim}{Q}_s(b) &= \underset{\sim}{\varphi}_s\underset{\sim}{Q}_s(b-h_s), \quad \underset{\sim}{\varphi}_s = e^{\underset{\sim}{D}_s(\bar{r}_s)h_s}
\end{aligned}
\tag{4.17.18}
$$

根据各层间的应力与位移的连续性条件，得结构的状态方程解为

$$\underset{\sim}{Q}_s(b) = \underset{\sim}{\varphi}_s \underset{\sim}{\varphi}_{s-1} \cdots \underset{\sim}{\varphi}_2 \underset{\sim}{\varphi}_1 \underset{\sim}{Q}_1(a)$$

或

$$\underset{\sim}{Q}_s(b) = \underset{\sim}{\Psi}\, \underset{\sim}{Q}_1(a) \tag{4.17.19}$$

式中

$$\underset{\sim}{\Psi} = \underset{\sim}{\varphi}_s \underset{\sim}{\varphi}_{s-1} \cdots \underset{\sim}{\varphi}_2 \underset{\sim}{\varphi}_1 \tag{4.17.20}$$

其中

$$\underset{\sim}{\varphi}_s = e^{\underset{\sim}{D}_s(r_s) h_s} \qquad (s = 1, 2, \cdots, s) \tag{4.17.21}$$

在上式中，$\bar{r}_1, \bar{r}_2, \cdots, \bar{r}_s$ 为各层中心到圆心的半径. 根据式(4.17.19)，由圆柱壳表面的应力与位移的边界条件，得定解方程，即

$$\underset{\sim}{\Psi}\, \underset{\sim}{Q}_1(a) = \underset{\sim}{P} \tag{4.17.22}$$

从式(4.17.22)求得 $\underset{\sim}{Q}_1(a)$ 值后，将其代入式(4.17.18)，即可逐步求得各层的应力与位移，再将其代入式(4.17.8)，则可得薄膜应力 $\sigma_x, \sigma_\theta, \tau_{\theta x}$ 分量，从而求得圆柱壳的全部应力与位移量. 有关式(4.17.21)中的指数矩阵的计算，有多种方法，详见文献[80].

4.18 轴对称圆柱壳弯曲的解法

在实际工程结构中，常采用对称结构，使问题简化，容易求得其解答. 对于轴对称圆柱壳问题，其状态方程可通过式(4.17.10)－(4.17.16)退化而得，也可以由轴对称圆柱壳的控制方程直接导出. 其状态方程为

$$\dot{\underset{\sim}{Y}} = \underset{\sim}{D}\, \underset{\sim}{Y} + \underset{\sim}{F} \tag{4.18.1}$$

式中

$$\underset{\sim}{Y} = [u \quad \sigma_r \quad \tau_{rx} \quad w]^T \tag{4.18.2}$$

$$\dot{\underset{\sim}{Y}} = \frac{\partial \underset{\sim}{Y}}{\partial r} \tag{4.18.3}$$

$$\underset{\sim}{F} = [0 \quad -F_r \quad -F_x \quad 0]^T \tag{4.18.4}$$

$$
\underset{\sim}{D}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{G} & -\dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\mu d}{r}\dfrac{\partial}{\partial x} & -\dfrac{(1-2\mu)}{(1-\mu)}\dfrac{1}{r} & -\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{d}{r^2} \\ -d\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & -\lambda\dfrac{\partial}{\partial x} & -\dfrac{1}{r} & -\dfrac{\mu d}{r}\dfrac{\partial}{\partial x} \\ -\lambda\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)} & 0 & -\dfrac{\lambda}{r} \end{bmatrix}
\tag{4.18.5}
$$

在 $x\theta$ 面内应力分量为

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d\dfrac{\partial}{\partial x} & \lambda & \dfrac{\mu d}{r} \\ \mu d\dfrac{\partial}{\partial x} & \lambda & \dfrac{d}{r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \sigma_r \\ w \end{Bmatrix}
\tag{4.18.6}
$$

下面通过一个算例来说明状态方程的解法.对图 4.16 所示两端简支轴对称闭合圆柱壳的弯曲问题,承受内压力 p .

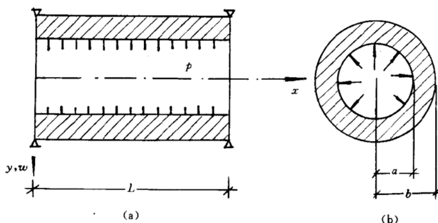


图 4.16 简支闭合圆柱形壳承受内压力

根据圆柱壳约束情况,构造圆柱壳的对偶场函数为

$$
\sigma_r = \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} \bar{\sigma}_{rm} \sin\frac{m\pi x}{L}
$$

$$\tau_{rx} = \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} \bar{\tau}_{rxm} \cos \frac{m\pi x}{L}$$

$$u = \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} \bar{u}_m \cos \frac{m\pi x}{L}$$

$$w = \sum_{m=1,3,5,\cdots}^{\infty} \bar{w}_m \sin \frac{m\pi x}{L} \qquad (4.18.7)$$

若不计圆柱壳的体力，将式(4.18.7)代入式(4.18.1)，有

$$\dot{\underset{\sim}{Y}} = \underset{\sim}{\bar{D}}\, \underset{\sim}{\bar{Y}} \qquad (4.18.8)$$

式中

$$\underset{\sim}{Y} = [\bar{u}_m \quad \bar{\sigma}_m \quad \bar{\tau}_{rxm} \quad \bar{w}_m]^T \qquad (4.18.9)$$

$$\dot{\underset{\sim}{\bar{Y}}} = \frac{\partial \underset{\sim}{\bar{Y}}}{\partial r} \qquad (4.18.10)$$

$$\underset{\sim}{\bar{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{G} & (-\frac{m\pi}{L}) \\ \frac{-\mu d}{r}(\frac{m\pi}{L}) & -\frac{(1-2\mu)}{(1-\mu)}\frac{1}{r} & (\frac{m\pi}{L}) & \frac{d}{r^2} \\ d(\frac{m\pi}{L})^2 & -\lambda(\frac{m\pi}{L}) & -\frac{1}{r} & -\frac{\mu d}{r}(\frac{m\pi}{L}) \\ \lambda(\frac{m\pi}{L}) & \frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{E(1-\mu)} & 0 & -\frac{\lambda}{r} \end{bmatrix}$$

(4.18.11)

式(4.18.8)的解答为

$$\underset{\sim}{\bar{Y}}(r) = \underset{\sim}{\varphi}\,\underset{\sim}{\bar{Y}}(a) \qquad (4.18.12)$$

式中

$$\underset{\sim}{\varphi} = e^{\int_a^r \underset{\sim}{D}(r)dr} = e^{\underset{\sim}{A}(r)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\underset{\sim}{A}^i)}{i!} \qquad (4.18.13)$$

其中

$$e^{\underset{\sim}{A}(r)} = \left[\begin{array}{c:c} \underset{\sim}{A}_{11} & \underset{\sim}{A}_{12} \\ \hdashline \underset{\sim}{A}_{21} & \underset{\sim}{A}_{22} \end{array}\right] \qquad (4.18.14)$$

$$\underset{\sim}{A}_{11}=\left[\begin{array}{c:c}0 & 0 \\ \hdashline \dfrac{-\mu d m\pi}{L}\ln\dfrac{r}{a} & -\dfrac{(1-2\mu)}{(1-\mu)}\ln\dfrac{r}{a}\end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{A}_{12}=\left[\begin{array}{c:c}\dfrac{1}{G}(r-a) & -\dfrac{m\pi}{L}(r-a) \\ \hdashline \dfrac{m\pi}{L}(r-a) & -d(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{a})\end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{A}_{21}=\left[\begin{array}{c:c}d\dfrac{(m\pi)^2}{L^2}(r-a) & -\lambda(\dfrac{m\pi}{L})(r-a) \\ \hdashline \lambda\dfrac{m\pi}{L}(r-a) & \dfrac{(1-2\mu)(1+\mu)}{E(1-\mu)}(r-a)\end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{A}_{22}=\left[\begin{array}{c:c}-\ln\dfrac{r}{a} & \dfrac{-\mu d m\pi}{L}\ln\dfrac{r}{a} \\ \hdashline 0 & -\lambda\ln\dfrac{r}{a}\end{array}\right] \tag{4.18.15}$$

根据轴对称圆柱壳的应力与位移边界条件

$$\underset{\sim}{\bar{Y}}(b)=[\bar{u}_m(b)\quad 0\quad 0\quad \bar{w}_m(b)]^T$$

$$\underset{\sim}{\bar{Y}}(a)=[\bar{u}_m(a)\quad q_m\quad 0\quad \bar{w}_m(a)]^T \tag{4.18.16}$$

还有

$$q_m=\frac{2p}{m\pi}(1-\cos m\pi)\qquad m=1,3,5,\cdots \tag{4.18.17}$$

根据(4.18.12)可得定解方程

$$\underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{\bar{Y}}(a)=\underset{\sim}{\bar{R}} \tag{4.18.18}$$

p 由式(4.18.18)解得 $\underset{\sim}{\bar{Y}}(a)$ 后，将其代入式(4.18.12)与(4.18.7)，可求得全部应力与位移的两类场变量值.

根据上面导出的算式，编制了计算程序. 下面给出一个数值算例. 圆柱壳的几何与物理参数如下：$a=2.0$，$b=2.2$，$L=10.0$，$E=10^5$，$\mu=0.3$，$p=1.0$，算得的全部应力与位移值列于表 4-11.

表 4-11　轴对称圆柱壳弯曲的数值结果

r	$u\times10^{-3}$ $(x=0)$	σ_r $(x=\frac{L}{2})$	τ_{rx} $(x=0)$	$w\times10^{-3}$ $(x=\frac{L}{2})$	σ_x $(x=\frac{L}{2})$	σ_θ $(x=\frac{L}{2})$
2.00	−0.1736	−1.0021	0	0.1980	−0.5804	9.795
2.05	−0.1545	−0.7690	0.9543	0.2003	−0.2974	9.659
2.10	−0.1357	−0.4988	0.7919	0.2026	−0.0184	9.528
2.15	−0.1190	−0.2405	0.5974	0.2059	0.2675	9.400
2.20	−0.0969	0.0000	0	0.2078	0.5175	9.275
S. Timoshenko [25],p. 477				0.2		10.0

4.19　状态空间法分析结构动力响应问题

本章前面部分介绍了状态空间法分析弹性结构的静力反应问题.由于状态方程具有可分离的数学结构,因此,可应用直接积分法求解问题,这比传统的方法优越,它不仅可以求解多变量问题,还能扩大解题范围.本节,通过弹性结构的动力方程,引入状态变量,建立结构动力分析的状态方程,并给出其解法.

结构在承受动力荷载作用时,其动力方程为

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underset{\sim}{X}}+\underset{\sim}{C}\dot{\underset{\sim}{X}}+\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{F}(t) \qquad (4.19.1)$$

式中,$\underset{\sim}{M}$,$\underset{\sim}{C}$,$\underset{\sim}{K}$ 分别为结构的质量矩阵,阻尼矩阵和刚度矩阵.$\underset{\sim}{F}(t)$ 为荷载列阵.引入状态变量

$$\underset{\sim}{q}=\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{X}\\ \dot{\underset{\sim}{X}}\end{Bmatrix} \qquad (4.19.2)$$

由式(4.19.1)与(4.19.2),得

$$\dot{\underset{\sim}{q}}=\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{q}+\underset{\sim}{P} \qquad (4.19.3)$$

式中
$$\underset{\sim}{D}=\left[\begin{array}{c:c}\underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{I} \\ \hdashline -\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{K} & -\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{C}\end{array}\right] \tag{4.19.4}$$

$$\underset{\sim}{P}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{F}(t)\end{bmatrix} \tag{4.19.5}$$

方程(4.19.3)的解答[80]

$$\underset{\sim}{q}=e^{\underset{\sim}{D}t}\underset{\sim}{q}(0)+\int_0^t e^{\underset{\sim}{D}(t-\tau)}\underset{\sim}{P}(\tau)d\tau \tag{4.19.6}$$

在式(4.19.6)中,有 $2n$ 个动态响应量,即 n 个位移响应量与 n 个速度响应量. 对于矩阵指数函数 $e^{\underset{\sim}{D}t}$ 的计算有多种方法,其中一种是将矩阵指数函数直接展开成麦克劳林级数来计算,但需要取截断项,其计算精度随截断项的增加而提高;另一种是采用开莱-哈密顿方法,该法能简化为有限项来计算,精度高. 在式(4.19.6)中的积分项,可采用数值积分,如高斯数值积分法等.

通过 $\underset{\sim}{D}$ 矩阵的特征值计算,可获得结构的各阶自振频率,并能给出各阶模态. 结构自振频率由下式确定

$$|\lambda\underset{\sim}{I}-\underset{\sim}{D}|=0 \text{ 或 } \left|\begin{array}{c:c}\underset{\sim}{I}\lambda & \underset{\sim}{I} \\ \hdashline -\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{K} & \underset{\sim}{I}\lambda+\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{C}\end{array}\right|=0$$

展开,有

$$\lambda^2\underset{\sim}{I}+\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{M}^{-1}\lambda+\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{K}=0 \tag{4.19.7}$$

由上式可计算出 $2n$ 个特征值 λ. 根据矩阵指数函数有限项展开方法得下式:

$$\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \hdashline 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_{n-1}(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t}\end{Bmatrix} \tag{4.19.8}$$

由上式求得 $\underset{\sim}{a}(t)$,则矩阵指数函数为

$$e^{\underset{\sim}{D}t}=a_0(t)\underset{\sim}{I}+a_1(t)\underset{\sim}{D}+a_2(t)\underset{\sim}{D}^2+\cdots+a_{n-1}(t)\underset{\sim}{D}^{n-1}$$

对于有 2 个 λ_i 重根的情况，在式(4.19.8) 中，第 $i+1$ 项变为下式

$$\frac{d}{d\lambda_i}[a_0(t)+a_1(t)\lambda_1+\cdots+a_i(t)\lambda_i^i+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_{n-1}^{n-1}]$$

$$=\frac{d}{d\lambda_i}e^{\lambda_i t}=te^{\lambda_i t}$$

于是，结构的动态响应量为

$$\underset{\sim}{q}=\underset{\sim}{q}_0+\underset{\sim}{q}_p \tag{4.19.9}$$

其中，结构初始位移与速度引起的响应量为

$$\underset{\sim}{q}_0(\underset{\sim}{X},\dot{\underset{\sim}{X}})=e^{\underset{\sim}{D}t}\underset{\sim}{q}(X_0,\dot{X}_0) \tag{4.19.10}$$

结构由于突加动力荷载引起的响应量为

$$\underset{\sim}{q}_p(\underset{\sim}{X},\dot{\underset{\sim}{X}})=\underset{\sim}{I}\,\underset{\sim}{P}\int_0^t a_0(t-\tau)d\tau+\cdots+\underset{\sim}{D}^{n-1}\underset{\sim}{P}\int_0^t a_{n-1}(t-\tau)d\tau \tag{4.19.11}$$

式中

$$\underset{\sim}{I}\,\underset{\sim}{P}=\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{0}\\ \cdots\cdots \\ \underset{\sim}{M}^{-1}\end{Bmatrix}\underset{\sim}{F}(t)$$

$$\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{P}=\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{I}\\ \cdots\cdots \\ -\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{M}^{-1}\end{Bmatrix}\underset{\sim}{F}(t)$$

$$\underset{\sim}{D}^2\underset{\sim}{P}=\begin{Bmatrix}-\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{M}^{-1}\\ \cdots\cdots \\ (-\underset{\sim}{C}\,\underset{\sim}{M}^{-1})^2-\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{K}\end{Bmatrix}\underset{\sim}{F}(t) \tag{4.19.12}$$

$$\vdots$$

根据上节导出的计算公式，给出一个算例，见文献[19]. 已知

$$\underset{\sim}{M}\,\ddot{\underset{\sim}{X}}+\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{F}$$

其中

$$\underset{\sim}{M}=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix},\underset{\sim}{K}=\begin{bmatrix}6&-2\\-2&4\end{bmatrix},\underset{\sim}{F}=\begin{Bmatrix}0\\10\end{Bmatrix}$$

由式(4.19.7)，即

$$|\lambda^2 \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{K}| = 0, \begin{matrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_2\end{matrix} = \pm\sqrt{2}\,i \text{ 与 } \begin{matrix}\lambda_3\\ \vdots \\ \lambda_4\end{matrix} = \pm\sqrt{5}\,i$$

根据式(4.19.8)，解出

$$\underset{\sim}{a}(t) = \underset{\sim}{\lambda}^{-1}\underset{\sim}{e}^{\lambda t}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -i & & \\ & & 1 & \\ & & & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & -2 & -2\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & -2 & 2\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{5} & -5 & -5\sqrt{5} \\ 1 & -\sqrt{5} & -5 & 5\sqrt{5} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} e^{\sqrt{2}\,i} \\ e^{-\sqrt{2}\,i} \\ e^{\sqrt{5}\,i} \\ e^{-\sqrt{5}\,i} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 1.667\cos\sqrt{2}\,t - 0.667\cos\sqrt{5}\,t \\ 1.172\sin\sqrt{2}\,t - 0.2938\sin\sqrt{5}\,t \\ 0.334\cos\sqrt{2}\,t - 0.334\cos\sqrt{5}\,t \\ 0.232\sin\sqrt{2}\,t - 0.147\sin\sqrt{5}\,t \end{Bmatrix}$$

这样，结构动力响应量为

$$\underset{\sim}{q}_p = \int_0^t e^{\underset{\sim}{D}(t-\tau)}\underset{\sim}{P}(\tau)d\tau$$

$$= \underset{\sim}{I}\,\underset{\sim}{P}\int_0^t a_0(t-\tau)d\tau + \underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{P}\int_0^t a_1(t-\tau)d\tau$$

$$+ \underset{\sim}{D}^2\underset{\sim}{P}\int_0^t a_2(t-\tau)d\tau + \underset{\sim}{D}^3\underset{\sim}{P}\int_0^t a_3(t-\tau)d\tau$$

其中

$$\underset{\sim}{I}\,\underset{\sim}{P} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \cdots\cdots \\ \underset{\sim}{M}^{-1} \end{Bmatrix} \underset{\sim}{F} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{P}=\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{I}\\ \underset{\sim}{0}\end{Bmatrix}\underset{\sim}{F}=\begin{Bmatrix}0\\10\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{D}^2\underset{\sim}{P}=\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{0}\\ \cdots\cdots\\ -\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{K}\end{Bmatrix}\underset{\sim}{F}=\begin{Bmatrix}0\\0\\10\\-40\end{Bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{D}^3\underset{\sim}{P}=\begin{Bmatrix}-\underset{\sim}{M}^{-1}\underset{\sim}{K}\\ \cdots\cdots\\ \underset{\sim}{0}\end{Bmatrix}\underset{\sim}{F}=\begin{Bmatrix}10\\-40\\0\\0\end{Bmatrix}$$

完成上述各积分项,即

$$\begin{aligned}\int_0^t a_0(t-\tau)d\tau &=\int_0^t[1.667\cos\sqrt{2}(t-\tau)\\ &\quad -0.667\cos\sqrt{5}(t-\tau)]d\tau\\ &=\frac{1.667}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t-\frac{0.667}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t a_1(t-\tau)d\tau &=\int_0^t[1.172\sin\sqrt{2}(t-\tau)\\ &\quad -0.2938\sin\sqrt{5}(t-\tau)]d\tau\\ &=\frac{1.172}{\sqrt{2}}(1-\cos\sqrt{2}t)\\ &\quad -\frac{0.2938}{\sqrt{5}}(1-\cos\sqrt{5}t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t a_2(t-\tau)d\tau &=\int_0^t[0.334\cos\sqrt{2}(t-\tau)\\ &\quad -0.334\cos\sqrt{5}(t-\tau)]d\tau\\ &=\frac{0.334}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t\end{aligned}$$

$$-\frac{0.334}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}\,t$$

$$\int_0^t a_3(t-\tau)d\tau=\int_0^t[0.232\sin\sqrt{2}(t-\tau)-0.147\sin\sqrt{5}(t-\tau)]d\tau$$

$$=\frac{0.232}{\sqrt{2}}(1-\cos\sqrt{2}\,t)-\frac{0.147}{\sqrt{5}}(1-\cos\sqrt{5}\,t)$$

于是,结构在突加荷载作用下,动力响应量为

$$\underset{\sim}{q}_p(\underset{\sim}{X}\ \dot{\underset{\sim}{X}})=\begin{Bmatrix}1.6405(1-\cos\sqrt{2}\,t)-0.6574(1-\cos\sqrt{5}\,t)\\1.7254(1-\cos\sqrt{2}\,t)+1.1368(1-\cos\sqrt{5}\,t)\\2.3618\sin\sqrt{2}\,t-1.4973\sin\sqrt{5}\,t\\2.3406\sin\sqrt{2}\,t+2.9918\sin\sqrt{5}\,t\end{Bmatrix}$$

由上式计算,$\Delta t,2\Delta t,3\Delta t,\cdots,12\Delta t$,其中 $\Delta t=0.28$ 秒.动力位移的响应量值,列于表 4-12.

表 4-12 状态空间法计算动力位移响应值

时间		Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$
状态法	X_1	0.0022	0.0366	0.1713	0.476	0.978	1.629
	X_2	0.3831	1.4170	2.795	4.121	5.043	5.359
		$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
	X_1	2.300	2.815	3.00	2.762	2.097	1.138
	X_2	5.076	4.381	3.566	2.905	2.560	2.533
时间		Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$
叠加[19]法	X_1	0.006	0.045	0.170	0.520	1.05	1.72
	X_2	0.376	1.42	2.79	4.12	5.04	5.33
		$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
	X_1	2.338	2.861	3.052	2.801	2.130	1.157
	X_2	4.985	4.277	3.457	2.806	2.434	2.489

4.20 状态空间迭代法计算结构的动力响应量

上节介绍的状态空间法计算结构动力响应问题时，需要求解 $\underset{\sim}{D}$矩阵的特征值 λ，有了特征值后，才能将矩阵指数函数展开有限项，并求得 $\underset{\sim}{a}(t)$. 从而，把矩阵指数函数确定，然后，通过式(4.19.11)求得结构的动力响应值.

本节，我们介绍一种迭代法来求解结构的动力响应. 这种方法，可以不必求 $\underset{\sim}{D}$矩阵的特征值，也不必解线性方程或求矩阵的逆，而只需作矩阵相乘运算.

若对某一段时间里，划分许多时间间隔 Δt，对于任意一时刻，$t_i = i\Delta t(i = 0,1,2,\cdots)$，结构动力响应量为

对 i 时刻

$$\underset{\sim}{X}_i(t_i) = e^{\underset{\sim}{D}t_i}\underset{\sim}{X}(0) + \int_0^{t_i} e^{\underset{\sim}{D}(t_i-\tau)}\underset{\sim}{P}(\tau)d\tau \tag{4.20.1}$$

对 $i+1$ 时刻

$$\underset{\sim}{X}_{i+1}(t_{i+1}) = e^{\underset{\sim}{D}t_{i+1}}\underset{\sim}{X}(0) + \int_0^{t_{i+1}} e^{\underset{\sim}{D}(t_{i+1}-\tau)}\underset{\sim}{P}(\tau)d\tau \tag{4.20.2}$$

上式，可以写成

$$\underset{\sim}{X}_{i+1}(t_{i+1}) = e^{\underset{\sim}{D}\Delta t}\underset{\sim}{X}_i(t_i) + \int_0^{\Delta t} e^{\underset{\sim}{D}(\Delta t-\tau)}\underset{\sim}{P}(\tau)d\tau$$

设 $i = 0$

$$\underset{\sim}{X}_1(t_1) = e^{\underset{\sim}{D}\Delta t}\underset{\sim}{X}(0) + \underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{P}(t_1) \tag{4.20.3}$$

上式中

$$\underset{\sim}{E} = \int_0^{\Delta t} e^{\underset{\sim}{D}(\Delta t-\tau)}d\tau = (e^{\underset{\sim}{D}\Delta t} - \underset{\sim}{I})\underset{\sim}{D}^{-1}$$

这样，状态空间迭代法一般式子如下：

$$\underset{\sim}{X}_{k+1}(t_{k+1}) = \underset{\sim}{\Phi}_1\underset{\sim}{X}_k(t_k) + \tau\underset{\sim}{\Phi}_2\underset{\sim}{P}(t_k) \tag{4.20.4}$$

式中

$$\underset{\sim}{\Phi}_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\underset{\sim}{D}\tau)^k}{k!}, \underset{\sim}{\Phi}_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\underset{\sim}{D}\tau)^k}{(k+1)!} \tag{4.20.5}$$

迭代法的另一种型式为

$$\underset{\sim}{X}_{k+1}(t_{k+1}) = \underset{\sim}{\Phi}_1 \underset{\sim}{X}_k(t_k) + \underset{\sim}{\Phi}_1 \underset{\sim}{D}^{-1} \underset{\sim}{P}(t_k) - \underset{\sim}{D}^{-1} \underset{\sim}{P}(t_k) \tag{4.20.6}$$

式(4.20.4)中的动荷载 $\underset{\sim}{P}(t_k)$ 在 τ 时间间隔内为常数. 若在此间隔内，动力荷载为线性变化时，则迭代公式为

$$\underset{\sim}{X}_{k+1}(t_{k+1}) = \underset{\sim}{\Phi}_1 \underset{\sim}{X}_k(t_k) + \underset{\sim}{\Phi}_1 \underset{\sim}{D}^{-1} \underset{\sim}{P}_k(t_k) + \underset{\sim}{\Phi}_1 \underset{\sim}{D}^{-1} \underset{\sim}{D}^{-1} [\underset{\sim}{P}_{k+1}(t_{k+1}) - \underset{\sim}{P}_k(t_k)] / \Delta t - \underset{\sim}{D}^{-1} \underset{\sim}{P}_{k+1}(t_{k+1}) + \underset{\sim}{D}^{-1} \underset{\sim}{D}^{-1} [\underset{\sim}{P}_k(t_k) - \underset{\sim}{P}_{k+1}(t_{k+1})] / \Delta t \tag{4.20.7}$$

从上面公式，可以看出，应用式(4.20.4)来进行迭代计算，不用对 $\underset{\sim}{D}$ 矩阵求逆. 若应用式(4.20.6) 与(4.20.7)，则需要对 $\underset{\sim}{D}$ 矩阵求逆，但可以应用精细算法，以提高计算精度. 下面我们简要地介绍一下精细迭代算法[7]. 对迭代公式(4.20.6)，可以对指数矩阵函数进行精细计算. 根据指数函数的加法定理，有

$$\exp(D \cdot \tau) = \left[\exp\left(D \cdot \frac{\tau}{m}\right)\right]^m$$

式中，可应用 $m = 2^N$ 算法. 例如 $N = 10, m = 1024$. 由于 τ 已是很小的时间区段，则 $\Delta t = \frac{\tau}{m}$ 将是非常小的时间区段了，就有

$$\exp(\underset{\sim}{D} \cdot \Delta t) \approx \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{D}\Delta t + \frac{1}{2!}(\underset{\sim}{D}\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}(\underset{\sim}{D}\Delta t)^3 + \frac{1}{4!}(\underset{\sim}{D}\Delta t)^4 \tag{4.20.8}$$

或

$$\exp(\underset{\sim}{D}\Delta t) = \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{D}_1 \Delta t + (\underset{\sim}{D}\Delta t)^2 \times \left[\underset{\sim}{I} + \frac{\underset{\sim}{D}\Delta t}{3} + \frac{(\underset{\sim}{D}\Delta t)^2}{12}\right] \Big/ 2 = \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{\Phi}_a$$

其中

$$\Phi_a = D\Delta t + (D\Delta t)^2 \times \frac{\left[I + \frac{D\Delta t}{3} + \frac{(D\Delta t)^2}{12}\right]}{2} \tag{4.20.9}$$

于是

$$\Phi = (I + \Phi_a)^{2^N} = (I + \Phi_a)^{2^{N-1}} \cdot (I + \Phi_a)^{2^{N-1}}$$

$$= (I + 2\Phi_a + \Phi_a\Phi_a)^{2^{N-1}} = (I + \Phi_N)^{2^{N-1}} \tag{4.20.10}$$

其中

$$\Phi_N = 2\Phi_a + \Phi_a\Phi_a \tag{4.20.11}$$

这里注意到,τ 为原步长,$\Delta t = \tau/m$ 为精细步长,精细迭代法公式为

$$X_{k+1} = \Phi X_k + \Phi D^{-1}P(t_k) - D^{-1}P(t_k) \tag{4.20.12}$$

例如,$N = 3, m = 8, \Delta t = \frac{\tau}{8}$

表 4-13 状态空间迭代法计算动力位移响应值

t		Δt	$2\Delta t$	$3\Delta t$	$4\Delta t$	$5\Delta t$	$6\Delta t$
状态空间迭代法	X_1	0.0025142	0.038067	0.17559	0.48602	0.99635	1.6570
	X_2	0.38188	1.4116	2.7810	4.0936	4.9962	5.2905
		$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
	X_1	2.3382	2.8609	3.0518	2.8057	2.1306	1.1572
	X_2	4.9856	4.2766	3.4574	2.8062	2.4843	2.4888
精细算法[7]	X_1	0.003	0.038	0.176	0.486	0.996	1.657
	X_2	0.382	1.412	2.781	4.094	4.996	5.291
		$7\Delta t$	$8\Delta t$	$9\Delta t$	$10\Delta t$	$11\Delta t$	$12\Delta t$
	X_1	2.338	2.861	3.052	2.806	2.131	1.157
	X_2	4.986	4.277	3.457	2.806	2.484	2.489

$$\Phi = (I + \Phi_a)^{2^{N-1}} = (I + \Phi_a)^4 = (I + \Phi_a)^2(I + \Phi_a)^2$$

$$= (I + 2\Phi_a + \Phi_a \cdot \Phi_a)^2 = (I + \Phi_a')^2$$

$$= (I + 2\Phi_a' + \Phi_a' \cdot \Phi_a') = (I + \Phi_a'') \tag{4.20.13}$$

其中

$$\underset{\sim}{\Phi}_a' = 2\underset{\sim}{\Phi}_a + \underset{\sim}{\Phi}_a \cdot \underset{\sim}{\Phi}_a, \quad \underset{\sim}{\Phi}_a'' + = 2\underset{\sim}{\Phi}_a' + \underset{\sim}{\Phi}_a' \cdot \underset{\sim}{\Phi}_a' \qquad (4.20.14)$$

根据已知时间步长 Δt,通过式(4.20.9)算得 $\underset{\sim}{\Phi}_a$,由式(4.20.14)算得 $\underset{\sim}{\Phi}_a'$,$\underset{\sim}{\Phi}_a''$,再根据式(4.20.13)算得 $\underset{\sim}{\Phi}$,最后由式(4.20.12)进行迭代法计算,求得各时刻的结构动力位移与速度的响应值.

下面给出一个例题,取文献[19]中的算例,应用状态空间迭代法来解,并与其他解法进行了比较.

由表 4-13 可以看出,状态空间迭代法计算所得结果,精度甚高.

第五章　多变量样条有限元法分析扁壳问题

基于最小总势能原理基础上的壳体结构的有限元与有限条模型[2,4,46]得到广泛应用.有限元法把壳体结构划分成许多单元,在单元上采用线性插值,分段多项式 Lagrange 插值,Hermite 插值和样条插值[28,30]等.但是,上述方法是属于一类单变量数值方法.近几年来,我们应用乘积型三次 B 样条插值函数来构造二类或三类场函数,如位移场、广义力场与应变场等函数,基于二、三类变量广义变分原理,建立壳体结构的样条混合有限元与三类变量样条有限元模型[72-76].本章主要介绍基于广义变分原理的样条混合有限元与三类变量样条有限元模型在扁壳结构上的应用.

5.1　双曲扁壳的基本方程

在壳体理论中,有关扁壳计算的假设与薄板理论相同.扁壳的中面应变考虑到中面的初曲率影响后,有

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{w}{R_x}, & \chi_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R_y}, & \chi_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2\frac{w}{R_{xy}}, & \chi_{xy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned}
\tag{5.1.1}
$$

式中

$$
\frac{1}{R_x} = k_x = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad \frac{1}{R_y} = k_y = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}
$$

$$
\frac{1}{R_{xy}} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = k_{xy} \tag{5.1.2}
$$

其中 $z=z(x,y)$ 为双曲扁壳中曲面方程. 根据上述几何方程，由广义虎克定律得由内力与位移来表达的物理方程：

$$
\begin{aligned}
N_x &= d\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} - \left(\frac{1}{R_x} + \frac{\mu}{R_y}\right)w\right] \\
N_y &= d\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{\mu}{R_x} + \frac{1}{R_y}\right)w\right] \\
N_{xy} &= \frac{1}{2}(1-\mu)d\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{R_{xy}}w\right] \\
M_x &= -D_b\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\
M_y &= -D_b\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \\
M_{xy} &= -(1-\mu)D_b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \tag{5.1.3}
$$

式中

$$
d = \frac{Et}{1-\mu^2}, \quad D_b = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}
$$

E 为壳体的弹性模量，t 为壳体的厚度，μ 为泊松比.

用矩阵表达双曲扁壳的应变分量为

$$
\underset{\sim}{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad r_{xy} \quad \chi_x \quad \chi_y \quad \chi_{xy}]^T = \underset{\sim}{L}^T \underset{\sim}{u} \tag{5.1.4}
$$

式中，$\underset{\sim}{L}$为微分运算子，$\underset{\sim}{u}$为位移分量.

$$
\underset{\sim}{L}^T = \begin{bmatrix}
\frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{1}{R_x} \\
0 & \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{1}{R_y} \\
\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{2}{R_{xy}} \\
0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\
0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
0 & 0 & -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}
\end{bmatrix} \tag{5.1.5}
$$

$$\underset{\sim}{u}=[u \quad v \quad w]^T \tag{5.1.6}$$

用矩阵表达双曲扁壳的物理方程为

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{\sigma}&=[N_x \quad N_y \quad N_{xy} \quad M_x \quad M_y \quad M_{xy}]^T \\ &=\underset{\sim}{D_b}\underset{\sim}{\varepsilon}\end{aligned} \tag{5.1.7}$$

其中,应变 $\underset{\sim}{\varepsilon}$ 表达式见(5.1.4),弹性矩阵表达式如下:

对各向同性体为

$$\underset{\sim}{D_b}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{d} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \dfrac{t^2}{12}\underset{\sim}{d}\end{bmatrix} \tag{5.1.8}$$

式中

$$\underset{\sim}{d}=d\begin{bmatrix}1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2}\end{bmatrix}, \quad d=\frac{Et}{(1-\mu^2)} \tag{5.1.9}$$

有关双曲扁壳的平衡方程[22]为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}+q_x=0 \\ &\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+q_y=0 \\ &\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}-k_xN_x-2k_{xy}N_{xy}-k_yN_y+q_z=0 \\ &\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}-Q_y=0 \\ &\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=0\end{aligned} \tag{5.1.10}$$

在扁壳中,分布荷载 q_x,q_y 引起的位移与内力是次要的. 因此在式(5.1.10)中,前两个式子可忽略 q_x 及 q_y 的作用,并将末两个式子中的 Q_x 及 Q_y 代入第三式,可得扁壳微分方程为

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=0 \tag{5.1.11}$$

$$k_x N_x + k_y N_y + 2k_{xy}N_{xy} - \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}\right) = q_z$$

由以上各式可知，双曲扁壳问题共有 15 个基本方程：3 个平衡方程式(5.1.11)，6 个几何方程式(5.1.1)和 6 个物理方程式(5.1.3). 在这些方程中，共有 15 个未知函数：6 个内力分量，即 $N_x,N_y,N_{xy},M_x,M_y,M_{xy}$；6 个变形分量，即 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,r_{xy},\chi_x,\chi_y,\chi_{xy}$；3 个位移分量，即 u,v,w. 而 Q_x,Q_y 根据式(5.1.10)末两式可知是非独立变量，故不必作为未知量. 为了求得扁壳的所有未知量，积分出现的常数，由问题的边界条件来确定. 当扁壳的矢高较小时，扁壳的边界条件：

$$\begin{aligned}&\text{当 } x=0, x=a \text{ 时}, v=0, w=0, N_x=0, M_x=0\\&\text{当 } y=0\ y=b \text{ 时}, u=0, w=0, N_y=0, M_y=0\end{aligned} \tag{5.1.12}$$

式(5.1.12)为扁壳的简支边界条件，这是在扁壳结构工程中常用的一类边界条件.

5.2 双曲扁壳的二类变量广义势能原理

在扁壳理论中[22]，二类变量广义变量原理可分为广义势能原理与广义余能原理. 对于二类变量广义势能原理，有

$$\delta \Pi_{2s} = \underset{\sim}{0} \tag{5.2.1}$$

在扁壳的齐次边界条件下，二类变量广义势能定义为

$$\begin{aligned}\Pi_{2s} = &\int_\Omega \underset{\sim}{N}^T(\underset{\sim}{\nabla}_2\underset{\sim}{\Delta})d\Omega + \int_\Omega \underset{\sim}{M}^T\overline{\underset{\sim}{B}}\, w d\Omega - \frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{d}^{-1}\underset{\sim}{N}\, d\Omega\\&- \frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{D_b^{-1}}\underset{\sim}{M}\, d\Omega - \int_\Omega \underset{\sim}{u}^T\underset{\sim}{p}\, d\Omega - \int_\Omega w p_z d\Omega\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

式中

$$\underset{\sim}{N} = [N_x \quad N_y \quad N_{xy}]^T, \qquad \underset{\sim}{M} = [M_x \quad M_y \quad M_{xy}]^T \tag{5.2.3}$$

$$\underset{\sim}{\Delta}=[u \quad v \quad w]^T, \qquad \underset{\sim}{u}=[u \quad v]^T \tag{5.2.4}$$

$$\underset{\sim}{p}=[p_x \quad p_y]^T \tag{5.2.5}$$

其中，u,v,w 为扁壳沿 x,y,z 方向的位移分量，$\underset{\sim}{\nabla}_2$ 为微分算子

$$\underset{\sim}{\nabla}_2=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -k_x \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -k_y \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & -2k_{xy} \end{bmatrix} \tag{5.2.6}$$

$$\underset{\sim}{\bar{B}}=[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}]^T \tag{5.2.7}$$

$\underset{\sim}{d}$ 与 $\underset{\sim}{D}_b=\frac{t^2}{12}\underset{\sim}{d}$ 分别为平面应力问题与薄板弯曲问题的弹性矩阵，详见式(5.1.9)。

关于位移向量 $\underset{\sim}{u}$ 和 w，其二类变量广义势能泛函 Π_{2s} 的驻值条件，$\delta\Pi_{2s}(\underset{\sim}{u},\underset{\sim}{N},w,\underset{\sim}{M})=\underset{\sim}{0}$，即有

$$\int_\Omega \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{\bar{A}}^T \delta \underset{\sim}{u}\, d\Omega + \int_\Omega \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{\bar{B}}\, \delta w d\Omega - \int_\Omega \delta \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{p}\, d\Omega$$

$$- \int_\Omega \delta w^T p_z d\Omega - \underset{\sim}{N}^T \delta w \underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{0}$$

对上式第一项进行一次分部积分，对第二项进行二次分部积分后，利用简支边界条件（为简便计）所得到的结果代入上式，就得到

$$\int_\Omega \delta \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{\bar{A}}^T \underset{\sim}{N}\, d\Omega + \int_\Omega \delta w^T \underset{\sim}{\bar{B}}^T \underset{\sim}{M}\, d\Omega - \int_\Omega \delta \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{p}\, d\Omega$$

$$- \int_\Omega \delta w^T p_z d\Omega - \int_\Omega \delta w^T \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{k}\, d\Omega = \underset{\sim}{0} \tag{5.2.8}$$

考虑到位移变分 $\delta\underset{\sim}{u}$，δw 在壳体内为不等于零的任意微小值，即得平衡方程如下

$$\underset{\sim}{\bar{A}}^T \underset{\sim}{N} - \underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{0} \tag{5.2.9}$$

$$\bar{\underset{\sim}{B}}^T \underset{\sim}{M} - \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{k} - p_z = 0 \tag{5.2.10}$$

式中

$$\underset{\sim}{k} = [-k_x \ -k_y \ -2k_{xy}]^T$$

$$\bar{\underset{\sim}{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{5.2.11}$$

关于广义力 $\underset{\sim}{N}$与 $\underset{\sim}{M}$的二类变量广义势能泛函的驻值条件，$\delta\Pi_{2s}=\underset{\sim}{0}$，即

$$\int_{\Omega} \delta \underset{\sim}{N}^T \bar{\underset{\sim}{A}} \underset{\sim}{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \delta \underset{\sim}{M}^T \bar{\underset{\sim}{B}} w d\Omega - \int_{\Omega} \delta \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{d}^{-1} \underset{\sim}{N} \, d\Omega$$

$$- \int_{\Omega} \delta \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{D}_b^{-1} \underset{\sim}{M} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{k} \, w d\Omega = \underset{\sim}{0} \tag{5.2.12}$$

考虑到广义力变分 $\delta\underset{\sim}{N}$、$\delta\underset{\sim}{M}$在壳体内为不等于零的任意微小值，则得几何或物理方程为

$$\underset{\sim}{d}^{-1} \underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{\nabla}_2 \underset{\sim}{\Delta} = \underset{\sim}{\varepsilon}_p, \quad \underset{\sim}{D}_b^{-1} \underset{\sim}{M} = \bar{\underset{\sim}{B}} \underset{\sim}{w} = \underset{\sim}{\chi} \tag{5.2.13}$$

由上述论证可知，由二类变量广义势能泛函的驻值条件，可得到双曲扁壳的平衡方程及几何方程或物理方程. 我们容易看出，式(5.1.3)，(5.1.10)和式(5.2.9)，(5.2.10)(5.2.13)是完全相同的. 若令 $\underset{\sim}{k}=\underset{\sim}{0}$，便分别得到平面应力问题与薄板变曲问题的各自独立方程组. 在扁壳的情况下通过 $\underset{\sim}{k}$的作用，使平面应力与薄板弯曲偶合起来了.

5.3 基于二类变量广义势能原理的双曲扁壳的多变量样条有限元法

根据上节，由二类变量广义势能原理可推导出双曲扁壳的多变量样条有限元法的方程组，为了便利列式过程，我们将式(5.2.2)作如下改变，即

$$\Pi_{2s} = \int_{\Omega} \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{\bar{A}} \underset{\sim}{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{\bar{B}} w d\Omega - \frac{1}{2}\int_{\Omega} \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{d}^{-1} \underset{\sim}{N} \, d\Omega$$

$$- \frac{1}{2}\int_{\Omega} \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{D}_b^{-1} \underset{\sim}{M} \, d\Omega - \int_{\Omega} \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{p} \, d\Omega - \int_{\Omega} w^T p_z d\Omega - \int_{\Omega} \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{k} \, w d\Omega \tag{5.3.1}$$

下面，我们来构造双曲扁壳的两类场函数，一类为广义力场函数，另一类为位移场函数，它们分别用双三次 B 样条函数来构造，广义力场函数为

$$\underset{\sim}{M} = [M_x \quad M_y \quad M_{xy}]^T = \underset{\sim}{\psi} \, \delta_1 \tag{5.3.2}$$

$$\underset{\sim}{N} = [N_x \quad N_y \quad N_{xy}]^T = \underset{\sim}{\psi} \, \underset{\sim}{\delta}_2 \tag{5.3.3}$$

位移场函数为

$$\underset{\sim}{u} = [u \quad v]^T = \underset{\sim}{\psi}_1 \underset{\sim}{\delta}_3 \tag{5.3.4}$$

$$w = \underset{\sim}{\psi}_2 \underset{\sim}{\delta}_4 \tag{5.3.5}$$

式中

$$\underset{\sim}{\delta}_1 = [\underset{\sim}{S}_1 \quad \underset{\sim}{S}_2 \quad \underset{\sim}{S}_3]^T, \quad \underset{\sim}{\delta}_2 = [\underset{\sim}{S}_4 \quad \underset{\sim}{S}_5 \quad \underset{\sim}{S}_6]^T$$

$$\underset{\sim}{\delta}_3 = [\underset{\sim}{S}_7 \quad \underset{\sim}{S}_8]^T, \quad \underset{\sim}{\delta}_4 = \underset{\sim}{S}_9 \tag{5.3.6}$$

$$\underset{\sim}{\psi} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Phi}(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}(y) & & \underset{\sim}{0} \\ & \underset{\sim}{\Phi}(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}(y) & \\ \underset{\sim}{0} & & \underset{\sim}{\Phi}(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}(y) \end{bmatrix} \tag{5.3.7}$$

$$\underset{\sim}{\psi}_1 = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Phi}(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}(y) & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\Phi}(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}(y) \end{bmatrix} \tag{5.3.8}$$

$$\underset{\sim}{\psi}_2 = \underset{\sim}{\Phi}(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}(y) \tag{5.3.9}$$

现将式(5.3.2)—(5.3.9)代入(5.3.1)，得二类变量广义势能为

$$\Pi_{2s} = \underset{\sim}{\delta}_1^T \underset{\sim}{E} \, \underset{\sim}{\delta}_4 - \frac{1}{2} \underset{\sim}{\delta}_1^T \underset{\sim}{L} \, \underset{\sim}{\delta}_1 + \underset{\sim}{\delta}_2^T \underset{\sim}{G} \, \underset{\sim}{\delta}_3 - \frac{1}{2} \underset{\sim}{\delta}_2^T \underset{\sim}{H} \, \underset{\sim}{\delta}_2$$

$$
-\underset{\sim}{\delta}_2^T \underset{\sim}{F}\, \underset{\sim}{\delta}_4 - \underset{\sim}{\delta}_3^T \underset{\sim}{P} - \underset{\sim}{\delta}_4^T \underset{\sim}{Q} \tag{5.3.10}
$$

根据二类变量广义势能原理

$$
\frac{\partial \Pi_{2s}}{\partial \underset{\sim}{\delta}_i} = \underset{\sim}{0} \qquad (i = 1,2,3,4)
$$

得

$$
\begin{bmatrix} \underset{\sim}{L} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{E} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{H} & \underset{\sim}{G} & \underset{\sim}{F} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{G}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{E}^T & \underset{\sim}{F}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\delta}_1 \\ \underset{\sim}{\delta}_2 \\ \underset{\sim}{\delta}_3 \\ \underset{\sim}{\delta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{P} \\ \underset{\sim}{Q} \end{bmatrix} \tag{5.3.11}
$$

式中

$$
\underset{\sim}{E} = \begin{bmatrix} -\underset{\sim}{A}_x^{02} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} \\ -\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{02} \\ -2\underset{\sim}{A}_x^{01} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{01} \end{bmatrix} \tag{5.3.12}
$$

$$
\underset{\sim}{L} = \frac{-1}{D_b(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} \tag{5.3.13}
$$

$$
\underset{\sim}{G} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_x^{01} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{01} \\ \underset{\sim}{A}_x^{01} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & \underset{\sim}{A}_x^{01} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} \end{bmatrix} \tag{5.3.14}
$$

$$
\underset{\sim}{H} = \frac{-1}{d_o(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix} \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} \tag{5.3.15}
$$

$$
\underset{\sim}{F} = -k\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} \tag{5.3.16}
$$

$$\underset{\sim}{P}=\iint_{\Omega}\underset{\sim}{\Psi}_1^T\underset{\sim}{p}\,dxdy=\iint_{\Omega}\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\Phi}^T(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}^T(y)p_x\\\underset{\sim}{\Phi}^T(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}^T(y)p_y\end{bmatrix}dxdy \quad (5.3.17)$$

$$\underset{\sim}{Q}=\iint_{\Omega}\underset{\sim}{\Phi}^T(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}^T(y)p_z dxdy \quad (5.3.18)$$

$$\underset{\sim}{A}_x^{ij}=\int_L[\underset{\sim}{\Phi}^i(x)]^T[\underset{\sim}{\Phi}^j(x)]dx \qquad (x=x,y;i,j=1,2)$$

(5.3.19)

根据式(5.3.11)可求得常数值 $\underset{\sim}{\delta}_1,\underset{\sim}{\delta}_2,\underset{\sim}{\delta}_3,\underset{\sim}{\delta}_4$ 后,再由式(5.3.2)－(5.3.5)可求得广义力与位移值.在应用样条插值函数时,若取的网格为 $4\times4,6\times6,8\times8$ 时,方程组的阶数分别为 441,729,1089,一般要在中型计算机上实施问题的计算.

若取 $\underset{\sim}{k}=\underset{\sim}{0}$,则分别可得平面应力问题与弯曲问题的二类变量样条有限元法方程组分别为

$$\begin{bmatrix}\underset{\sim}{H} & \underset{\sim}{G}\\\underset{\sim}{G}^T & \underset{\sim}{0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{\delta}_2\\\underset{\sim}{\delta}_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{O}\\\underset{\sim}{P}\end{Bmatrix} \quad (5.3.20)$$

和

$$\begin{bmatrix}\underset{\sim}{L} & \underset{\sim}{E}\\\underset{\sim}{E}^T & \underset{\sim}{0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{\delta}_1\\\underset{\sim}{\delta}_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{O}\\\underset{\sim}{Q}\end{Bmatrix} \quad (5.3.21)$$

对于均布荷载列阵的情况,有

$$\int_0^L\underset{\sim}{\Phi}(x)dx=h_x[\frac{1}{24}\ \frac{1}{3}\ \frac{3}{4}\ 1\cdots1\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{24}] \quad (5.3.22)$$

对于线性分布荷载情况,有

$$\int_0^L x\underset{\sim}{\Phi}(x)dx=h_x^2[\frac{1}{120}\ \frac{1}{5}\ \frac{9}{10}\quad 2\ 3\ \cdots\ (3N-2)\ (\frac{3N}{4}-\frac{9}{10})(\frac{N}{3}-\frac{1}{5})\ (\frac{N}{24}-\frac{1}{120})]$$

(5.3.23)

对于集中荷载作用的情况

$$\int_0^a\int_0^b \delta(x-\zeta, y-\eta)\underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y)dxdy = \underset{\sim}{\Phi}(\zeta)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(\eta) \tag{5.3.24}$$

式中,ζ,η 为集中荷载作用点的坐标.

对于文克勒(Winkler)基础板问题,方程组为

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{L} & \underset{\sim}{E} \\ \underset{\sim}{E}^T & \underset{\sim}{K}_E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\delta}_1 \\ \underset{\sim}{\delta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{O} \\ \underset{\sim}{Q} \end{Bmatrix}$$

式中

$$\underset{\sim}{K}_E = k_e[\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00}]$$

$$\bar{k} = k_e L^4 / D_b$$

5.4 数值算例

下面若干数字算例在西门子 7570 计算机上算得的,其数值结果详见表 5-1—表 5-4. 例题 5-1 四边简支双曲扁壳数据如下:厚度 $t=0.06$m,边长 $l=24.0$m,壳体曲率半径 $R_x=R_y=32.4$m,均布荷载 $q=0.5$kN/m^2,弹性模量 $E=2.0\times10^6$kN/m^2,泊松比 $\mu=0.3$,计算结果见表 5-1. 由于壳中点处弯矩较小,扭矩为零,所以表中仅列出挠度与薄膜的内力值. 例题 5-2,5-3 与 5-4 的计算数据见表 5-1. 表 5-2 与表5-3 中的数据是打印结果.

表 5-1 四边简支扁壳中点处的挠度与薄膜内力值

网格	W(m)	N(kN/m)
4×4	0.0034033	9.13849
6×6	0.0029358	7.88317
8×8	0.0029912	8.03193
精确解	0.003020	8.100

表 5-2　四边简支双曲扁壳承受均布荷载中点的位移与内力值收敛情况

网格	D_bW/qL^4	M_x/qL^2	M_y/qL^2	M_{xy}/qL^2
4 * 4	0.433617$E-$05	0.14329$E-$03	0.143430$E-$03	0.706123$E-$11
6 * 6	0.413589$E-$05	$-$0.457706$E--$04	$-$0.457706$E-$04	$-$0.315292$E-$10
8 * 8	0.403385$E-$05	0.302560$E-$05	0.302567$E-$05	0.689574$E-$10
10 * 10	0.407380$E-$05	0..318848$E-$05	0.318818$E-$05	$-$.792902$E-$10

双曲扁壳计算数据：$R_x=R_y=75\text{m}, t=8\text{cm}, L=30\text{m}, q=0.3\text{N/m}^3, E=3\times10^6\text{N/m}^2, \mu=0.3$

表 5-3　四边简支双曲扁壳中央处承受集中荷载处位移与内力值收敛情况

网格	D_bW/qL^4	M_x/qL^2	M_y/qL^2	M_{xy}/qL^2
4 * 4	0.166864$E-$03	0.148308$E-$01	0.148308$E-$01	$-$0.146166$E-$08
6 * 6	0.261428$E-$03	0.420623$E-$01	0.420623$E-$01	$-$0.967702$E-$09
8 * 8	0.311928$E-$03	0.712409$E-$01	0.712409$E-$01	$-$0.911799$E-$08

双曲扁壳计算数据：$R=96\text{cm}, t=0.1\text{cm}, L=30\text{cm}, P=100\text{N}, E=10^7\text{N/cm}^2, \mu=0.3$

表 5-4　四边简支双曲扁壳，壳面中点处承受集中荷载，扁壳中央处位移与内力值

网格	W(cm)	M_y(N-cm)/cm	N_y(N/cm)
8×8	0.0349	7.122	181.730
[59]	0.0365	10.764	207.000
有限元法	0.0356	9.678	204.671

5.5　双曲扁壳的振动

上几节介绍了双曲扁壳的二类变量样条有限元法及其在弯曲问题上的应用. 从数字例子的计算结果来看，板的挠度与弯矩的精度均较高. 由于在二变量样条元法中，独立假设位移函数和弯矩场函数，因此，两者精度均较高. 本节讨论扁壳的振动问题. 对于双曲扁壳的横向振动，二类变量广义势能泛函定义为

$$\Pi_{2s} = \int_\Omega \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{\bar{A}}\, u d\Omega + \int_\Omega \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{\bar{B}}\, w d\Omega$$

$$- \frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{d}^{-1} \underset{\sim}{N}\, d\Omega - \frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{D}_b^{-1} \underset{\sim}{M}\, d\Omega$$

$$- \int_\Omega \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{k}\, w d\Omega - \frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{\bar{m}}\, \omega^2 (u^2 + v^2 + w^2) d\Omega \qquad (5.5.1)$$

若将(5.3.2)—(5.3.5)代入上式，并考虑到扁壳的中面位移 u,v 比 w 小一个量级，这样 u^2,v^2 比 w^2 小两个量级，因此在计算最大动能时，略去二阶小量，则根据二类变量广义势能原理有

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{L} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{E} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{H} & \underset{\sim}{G} & \underset{\sim}{F} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{G}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{E}^T & \underset{\sim}{F}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\delta}_1 \\ \underset{\sim}{\delta}_2 \\ \underset{\sim}{\delta}_3 \\ \underset{\sim}{\delta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{K}_{11} & \underset{\sim}{K}_{12} \\ \underset{\sim}{K}_{12}^T & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\delta}_1 \\ \underset{\sim}{\delta}_2 \\ \underset{\sim}{\delta}_3 \\ \underset{\sim}{\delta}_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \omega^2 \underset{\sim}{M}_\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\delta}_1 \\ \underset{\sim}{\delta}_2 \\ \underset{\sim}{\delta}_3 \\ \underset{\sim}{\delta}_4 \end{bmatrix} \qquad (5.5.2)$$

振动特征方程为

$$\left| - \underset{\sim}{K}_{12}^T \underset{\sim}{K}_{11}^{-1} \underset{\sim}{K}_{12} - \omega^2 \underset{\sim}{M}_\lambda \right| = 0 \qquad (5.5.3)$$

其中

$$\underset{\sim}{K}_{11} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{L} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{H} & \underset{\sim}{G} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{G}^T & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix}, \qquad \underset{\sim}{K}_{12} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{E} \\ \underset{\sim}{F} \\ \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \qquad (5.5.4)$$

$$\underset{\sim}{M}_\lambda = \underset{\sim}{\bar{m}}\, \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} \qquad (5.5.5)$$

5.6　闭合圆柱形薄壳的多变量样条有限元法

在工程实际中，常会遇到闭合圆柱形薄壳结构、承受对称或非对称荷载作用.圆柱壳在轴对称荷载作用下，其横截面在变形后，仍保持为一个圆形.在荷载作用处和约束处，其位移和应力的变化较为显著，会引起弯曲应力，其基本方程为[30]

$$D_b \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Et}{R^2} w = q_x \tag{5.6.1}$$

$$N_\varphi = -\frac{Et}{R} w,\ M_x = -D_b \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$M_\varphi = \mu M_x \tag{5.6.2}$$

式中

$$D_b = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \tag{5.6.3}$$

对应于式(5.6.1)的壳体微分方程齐次边界条件的二类变量广义势能泛函定义为

$$\Pi_{2s} = \int_L -M_x \frac{d^2 w}{dx^2} dx - \int_L \frac{M_x^2}{2D_b} dx + \frac{Et}{2R^2}\int_L w^2 dx - \int_L q_x w dx \tag{5.6.4}$$

应用三次B样条插值函数来构造二类场函数，它们是

$$\underset{\sim}{M_x} = \underset{\sim}{\Phi}(x)\underset{\sim}{S_1},\ w = \underset{\sim}{\Phi}(x)\underset{\sim}{S_2} \tag{5.6.5}$$

式中

$$\underset{\sim}{\Phi}(x) = [\Phi_{-1},\ \Phi_0,\ \Phi_1, \cdots, \Phi_N, \Phi_{N+1}] \tag{5.6.6}$$

将式(5.6.5)代入式(5.6.4)，根据二类变量广义势能原理，即

$$\frac{\partial \Pi_{2s}}{\partial \underset{\sim}{S_1}} = \underset{\sim}{0},\ \frac{\partial \Pi_{2s}}{\partial \underset{\sim}{S_2}} = \underset{\sim}{0}$$

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\underset{\sim}{A_x^{00}}}{ED_b} & -\underset{\sim}{A_x^{02}} \\ -\underset{\sim}{A_x^{02T}} & \underset{\sim}{K_E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{S_1} \\ \underset{\sim}{S_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{P} \end{bmatrix} \tag{5.6.7}$$

式中，$\underset{\sim}{A}_x^{00}$，$\underset{\sim}{A}_x^{02}$ 详见第一章. $\underset{\sim}{P}=\int_0^L \underset{\sim}{\Phi}^T(x)q_x dx$，由式(5.3.22)可作具体计算. 从式(5.6.7)解出常数 $\underset{\sim}{S}_1$ 和 $\underset{\sim}{S}_2$，然后由式(5.6.5)分别求得二类变量弯矩 $\underset{\sim}{M}_x$ 和位移 w.

对于振动与稳定问题，其二类变量广义势能泛函为

$$\Pi_{2s}=\int_L -M_x\frac{d^2w}{dx^2}dx-\int_L\frac{M_x^2dx}{2D_b}+\frac{Et}{2R^2}\int_L w^2dx$$
$$-\frac{1}{2}\int_L\lambda\overline{m}w^2dx-\int_L\frac{1}{2}N_x\left(\frac{dw}{dx}\right)^2dx \tag{5.6.8}$$

将式(5.6.5)代入上式，并应用二变量广义势能原理得方程如下：

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\underset{\sim}{A}_x^{00}}{ED_b} & -\underset{\sim}{A}_x^{02} \\ -\underset{\sim}{A}_x^{02T} & \underset{\sim}{K}_E \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underset{\sim}{S}_1 \\ \underset{\sim}{S}_2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{M}_\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underset{\sim}{S}_1 \\ \underset{\sim}{S}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{K}_G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underset{\sim}{S}_1 \\ \underset{\sim}{S}_2\end{bmatrix} \tag{5.6.9}$$

对于振动问题，其特征方程为

$$|\underset{\sim}{\widetilde{K}}-\underset{\sim}{\lambda}\,\underset{\sim}{M}_\lambda|=0 \tag{5.6.10}$$

对于稳定问题，其特征方程为

$$|\underset{\sim}{\widetilde{K}}-\underset{\sim}{K}_G|=0 \tag{5.6.11}$$

式中

$$\underset{\sim}{\widetilde{K}}=(\underset{\sim}{K}_E-\underset{\sim}{A}_x^{02T}(\underset{\sim}{A}_x^{00})^{-1}\underset{\sim}{A}_x^{02}D_b) \tag{5.6.12}$$

$$\underset{\sim}{M}_\lambda=\overline{m}\int_0^L\underset{\sim}{\Phi}^T(x)\underset{\sim}{\Phi}(x)dx \tag{5.6.13}$$

$$\underset{\sim}{K}_G=\int_0^L N_x\underset{\sim}{\Phi}'^T(x)\underset{\sim}{\Phi}'(x)dx \tag{5.6.14}$$

5.7 开口圆柱形扁壳弯曲的二类变量广义势能原理

开口圆柱形薄壳在很多工程实际中得到广泛应用，例如厂房屋盖，渡槽等常采用开口圆柱形薄壳. 本节主要介绍开口圆柱形薄壳弯曲的二类变量广义势能原理. 开口圆柱形扁壳弯曲的基本方程[30]：

平衡方程

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi}+p_x=0\\
&\frac{1}{R}\frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x}+p_\varphi=0\\
&\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{N_\varphi}{R}+p_z=0\\
&\frac{1}{R}\frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x}-Q_\varphi=0\\
&\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \varphi}-Q_x=0
\end{aligned}
\qquad (5.7.1)
$$

几何方程

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_\varphi=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}+w\right),\ \gamma_{x\varphi}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\\
&\chi_x=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \chi_\varphi=-\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2},\quad \chi_{x\varphi}=-\frac{2}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial \varphi}
\end{aligned}
\qquad (5.7.2)
$$

物理方程

$$
\begin{aligned}
&N_x=d\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \psi}+\frac{w}{R}\right)\right]\\
&N_\varphi=d\left[\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \psi}+\frac{w}{R}\right)+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right]\\
&N_{x\varphi}=Gt\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\\
&M_x=-D_b\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\mu}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\\
&M_\varphi=-D_b\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)
\end{aligned}
$$

$$M_{x\varphi} = -\frac{1-\mu}{R} D_b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \tag{5.7.3}$$

对应于上述圆柱扁壳弯曲的平衡方程(5.7.1)、几何方程(5.7.2)和物理方程(5.7.3)的二类变量广义势能泛函定义为

$$\Pi_{2s} = \int_\Omega \underset{\sim}{N}^T (\underset{\sim}{\nabla}_2 \underset{\sim}{\Delta}) d\Omega + \int_\Omega \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{\bar{B}}_1 w d\Omega - \frac{1}{2} \int_\Omega \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{d}^{-1} \underset{\sim}{N}\, d\Omega$$

$$-\frac{1}{2} \int \underset{\sim}{M}^T D_b^{-1} \underset{\sim}{M}\, \Omega - \int_\Omega \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{p}\, d\Omega - \int_\Omega w p_z d\Omega \tag{5.7.4}$$

式中

$$\underset{\sim}{N} = [N_x \quad N_\varphi \quad N_{x\varphi}]^T, \quad \underset{\sim}{M} = [M_x \quad M_\varphi \quad M_{x\varphi}]^T$$

$$\underset{\sim}{\nabla}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & k\frac{\partial}{\partial \varphi} & k \\ k\frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\Delta} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \quad \begin{matrix} \underset{\sim}{u} = [u \quad v]^T \\ \underset{\sim}{p} = [p_x \quad p_\varphi]^T \end{matrix} \tag{5.7.5}$$

$$\underset{\sim}{\bar{B}}_1 = [-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad -k^2\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad -2k\frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi}]^T$$

现来论证开口圆柱形扁壳弯曲的二类变量广义势能原理. 关于位移变分 $\delta \underset{\sim}{u}, \delta w$ 的二类变量广义势能 Π_{2s}的驻值条件，$\delta \Pi_{2c}(\underset{\sim}{u}, w, \underset{\sim}{N}, \underset{\sim}{M}) = \underset{\sim}{0}$，即有

$$\int_\Omega \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{\bar{A}}\, \delta \underset{\sim}{u}\, d\Omega + \int_\Omega \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{\bar{B}}_1 \delta w d\Omega - \int_\Omega \delta \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{p}\, d\Omega$$

$$- \int_\Omega \delta w^T p_z d\Omega - \int_\Omega \underset{\sim}{k}\, N_\varphi w d\Omega = \underset{\sim}{0} \tag{5.7.6}$$

对上式第一项进行一次分部积分，对第二项进行二次分部积分后，利用

简支边界条件(为简便计)所得到的结果代入式(5.7.6),就得到

$$\int_{\Omega}\delta \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{\bar{A}}^T \underset{\sim}{N}\, d\Omega + \int_{\Omega}\delta w^T \underset{\sim}{\bar{B}}^T \underset{\sim}{M}\, d\Omega - \int_{\Omega}\delta \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{p}\, d\Omega$$

$$-\int_{\Omega}\delta w^T p_z d\Omega - \int_{\Omega}\underset{\sim}{N}_{\varphi}\underset{\sim}{k}\,\delta w d\Omega = \underset{\sim}{0} \qquad (5.7.7)$$

考虑到位移变分 $\delta \underset{\sim}{u}, \delta w$ 在壳体内不为零的任意微小值,即得平衡方程如下:

$$\underset{\sim}{\bar{A}}^T \underset{\sim}{N} - \underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{0}, \qquad \underset{\sim}{\bar{B}}_1^T \underset{\sim}{M} - \underset{\sim}{N}_{\varphi}\underset{\sim}{k} - p_z = 0 \qquad (5.7.8)$$

式中

$$\underset{\sim}{\bar{A}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{k\partial}{\partial \varphi} \\ \dfrac{k\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad (5.7.9)$$

关于广义变分 $\delta \underset{\sim}{N}, \delta \underset{\sim}{M}$ 的二类变量广义势能泛函的驻值条件,$\delta \Pi_{2s} = \underset{\sim}{0}$,即有

$$\int_{\Omega}\delta \underset{\sim}{N}^T (\underset{\sim}{\nabla}_2 \underset{\sim}{\Delta}) d\Omega + \int_{\Omega}\delta \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{B}_1 w d\Omega$$

$$-\int_{\Omega}\delta \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{d}^{-1} \underset{\sim}{N}\, d\Omega - \int_{\Omega}\delta \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{D}_b^{-1} \underset{\sim}{M}\, d\Omega = \underset{\sim}{0}$$

考虑到广义力变分 $\delta \underset{\sim}{N}, \delta \underset{\sim}{M}$ 在壳体内不为零的任意微小值,则得圆柱形扁壳的几何方程或物理方程为

$$\underset{\sim}{d}^{-1}\underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{\nabla}_2 \underset{\sim}{\Delta} = \underset{\sim}{\varepsilon}_P \quad , \quad \underset{\sim}{D}_b^{-1}\underset{\sim}{M} = \underset{\sim}{\bar{B}}_1 \underset{\sim}{w} = \underset{\sim}{\chi} \qquad (5.7.10)$$

式中

$$\underset{\sim}{\chi} = [\chi_x \quad \chi_{\varphi} \quad \chi_{x\varphi}]^T \qquad (5.7.11)$$

我们容易比较出式(5.7.8),(5.7.10)和式(5.7.1),(5.7.3)是完全相同的.

5.8 开口圆柱扁壳的多变量样条有限元法

下面导出开口圆柱扁壳的多变量样条有限元法方程组，首先将式(5.7.4)改写为

$$\begin{aligned}\Pi_{2s} = &\int_\Omega \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{\bar{A}}\, \underset{\sim}{u}\, d\Omega + \int_\Omega \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{\bar{B}}_1 w d\Omega \\ &- \frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{d}^{-1} \underset{\sim}{N}\, d\Omega - \frac{1}{2}\int_\Omega \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{D}_b^{-1} \underset{\sim}{M}\, d\Omega \\ &- \int_\Omega \underset{\sim}{N}_\varphi \underset{\sim}{k}\, w d\Omega - \int_\Omega \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{p}\, d\Omega - \int_\Omega w p_z d\Omega \end{aligned} \tag{5.8.1}$$

假设广义力场函数为两类：

$$\underset{\sim}{M} = [M_x \quad M_\varphi \quad M_{x\varphi}]^T = \underset{\sim}{\psi}\, \underset{\sim}{\delta}_1 \tag{5.8.2}$$

$$\underset{\sim}{N} = [N_x \quad N_\varphi \quad N_{x\varphi}]^T = \underset{\sim}{\psi}\, \underset{\sim}{\delta}_2 \tag{5.8.3}$$

位移场函数为

$$\underset{\sim}{u} = [u \quad v]^T = \underset{\sim}{\psi}_1 \underset{\sim}{\delta}_3 \tag{5.8.4}$$

$$w = \underset{\sim}{\psi}_2 \underset{\sim}{\delta}_4 \tag{5.8.5}$$

式中

$$\begin{aligned} &\underset{\sim}{\delta}_1 = [\underset{\sim}{S}_1 \underset{\sim}{S}_2 \underset{\sim}{S}_3]^T, \qquad \underset{\sim}{\delta}_2 = [\underset{\sim}{S}_4 \underset{\sim}{S}_5 \underset{\sim}{S}_6]^T \\ &\underset{\sim}{\delta}_3 = [\underset{\sim}{S}_7 \underset{\sim}{S}_8]^T, \qquad \underset{\sim}{\delta}_4 = \underset{\sim}{S}_9 \end{aligned} \tag{5.8.6}$$

其中，$\underset{\sim}{\psi}$，$\underset{\sim}{\psi}_1$ 和 $\underset{\sim}{\psi}_2$ 与式(5.3.7)，(5.3.8)，(5.3.9)相同. 将上述各式代入(5.8.1)，应用二类变量广义势能原理得开口圆柱扁壳的多变量样条有限元方程为

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{\bar{L}} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\bar{E}} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\bar{H}} & \underset{\sim}{\bar{G}} & \underset{\sim}{\bar{F}} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\bar{G}}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{\bar{E}}^T & \underset{\sim}{\bar{F}}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\delta}_1 \\ \underset{\sim}{\delta}_2 \\ \underset{\sim}{\delta}_3 \\ \underset{\sim}{\delta}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{\bar{P}} \\ \underset{\sim}{\bar{Q}} \end{Bmatrix} \tag{5.8.7}$$

式中左端矩阵中的分块元素为

$$\bar{\underset{\sim}{L}}=\frac{-1}{D_b(1-\mu^2)}\begin{bmatrix}1 & -\mu & 0\\ -\mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2(1+\mu)\end{bmatrix}\underset{\sim}{A}_x^{00}\otimes\underset{\sim}{A}_\varphi^{00}\quad(5.8.8)$$

$$\bar{\underset{\sim}{E}}=[-\underset{\sim}{A}_x^{02}\otimes\underset{\sim}{A}_\varphi^{00}-k^2\underset{\sim}{A}_x^{02}\otimes\underset{\sim}{A}_\varphi^{01}-2k\underset{\sim}{A}_x^{01}\otimes\underset{\sim}{A}_\varphi^{00}]^T\quad(5.8.9)$$

$$\bar{\underset{\sim}{G}}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{A}_x^{01}\otimes\underset{\sim}{A}_\varphi^{00} & \underset{\sim}{0}\\ \underset{\sim}{0} & k\underset{\sim}{A}_x^{00}\otimes\underset{\sim}{A}_\varphi^{00}\\ k\underset{\sim}{A}_x^{00}\otimes\underset{\sim}{A}_\varphi^{01} & \underset{\sim}{A}_x^{01}\otimes\underset{\sim}{A}_\varphi^{00}\end{bmatrix}\quad(5.8.10)$$

$$\bar{\underset{\sim}{H}}=\frac{-1}{d(1-\mu^2)}\begin{bmatrix}1 & -\mu & 0\\ -\mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2(1+\mu)\end{bmatrix}\underset{\sim}{A}_x^{00}\otimes\underset{\sim}{A}_\varphi^{00}\quad(5.8.11)$$

$$\underset{\sim}{F}=k\underset{\sim}{A}_x^{00}\otimes\underset{\sim}{A}_\varphi^{00}\quad(5.8.12)$$

$$\bar{\underset{\sim}{P}}=\iint_\Omega\underset{\sim}{\psi}_1^T\underset{\sim}{p}\,d\Omega=\iint_\Omega\begin{Bmatrix}\underset{\sim}{\Phi}^T(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}^T(\varphi)p_x\\ \underset{\sim}{\Phi}^T(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}^T(\varphi)p_\varphi\end{Bmatrix}Rdxd\varphi\quad(5.8.13)$$

$$\bar{\underset{\sim}{Q}}=\iint_\Omega\underset{\sim}{\Phi}^T(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}^T(\varphi)p_zRdxd\varphi\quad(5.8.14)$$

$$\underset{\sim}{A}_x^{ij}=\int_L\underset{\sim}{\Phi}^{iT}(x)\underset{\sim}{\Phi}^j(x)dx\ (x=x,\varphi;i,j=0,1,2)\quad(5.8.15)$$

5.9 开口圆柱扁壳的振动与稳定

对应于圆柱扁壳的振动与稳定问题，在二类变量广义势能泛函公式中，惯性力引起的最大动能项与轴向力引起的势能项分别为

$$\frac{1}{2}\int_\Omega\bar{m}\omega^2(u^2+v^2+w^2)d\Omega\text{ 及 }\frac{1}{2}\int_\Omega N_x(\frac{\partial w}{\partial x})^2d\Omega$$

根据二类变量广义势能原理得方程如下：

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{K}_{11} & \underset{\sim}{K}_{12} \\ \underset{\sim}{K}_{12}^{T} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{d} \\ \underset{\sim}{\delta}_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \lambda \underset{\sim}{M}_{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{d} \\ \underset{\sim}{\delta}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{K}_{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{d} \\ \underset{\sim}{\delta}_4 \end{bmatrix} \tag{5.9.1}$$

由上式可得振动与稳定特征方程分别为

$$\left| -\underset{\sim}{K}_{12}^{T} \underset{\sim}{K}_{11}^{-1} \underset{\sim}{K}_{12} - \lambda \underset{\sim}{M}_{\lambda} \right| = 0 \tag{5.9.2}$$

和

$$\left| -\underset{\sim}{K}_{12}^{T} \underset{\sim}{K}_{11}^{-1} \underset{\sim}{K}_{12} - \underset{\sim}{K}_{G} \right| = 0 \tag{5.9.3}$$

式中

$$\underset{\sim}{K}_{12} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\overline{E}} \\ \underset{\sim}{\overline{F}} \\ \underset{\sim}{0} \end{Bmatrix} \tag{5.9.4}$$

$$\underset{\sim}{K}_{11} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\overline{L}} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\overline{H}} & \underset{\sim}{G} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\overline{G}}^{T} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \tag{5.9.5}$$

$$\underset{\sim}{M}_{\lambda} = \overline{m} \underset{\sim}{A}_{x}^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_{y}^{00} \tag{5.9.6}$$

$$\underset{\sim}{K}_{G} = N_{x} \underset{\sim}{A}_{x}^{11} \otimes \underset{\sim}{A}_{y}^{00} \tag{5.9.7}$$

$$\underset{\sim}{d} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\delta}_1 \\ \underset{\sim}{\delta}_2 \\ \underset{\sim}{\delta}_3 \end{Bmatrix} \tag{5.9.8}$$

我们注意到，在推导开口圆柱壳的横向振动及纵向稳定计算公式时，忽略了圆柱壳中面位移 u，v. 这是因为 u，v 比横向位移 w 要小一个量级的缘故.

5.10 双曲扁壳的三类变量广义势能原理

上几节，应用二类变量广义势能原理建立了双曲扁壳、圆柱形扁壳等结构分析的多变量样条有限元法计算格式. 通过若干数值算例的计算结果表明，对位移、弯矩与扭矩的计算精度均较高. 本节先论证双曲扁壳的三类变量广义势能原理，然后来建立三类变量的多变量样条有限元法的计算格式. 由于独立设定三类场函数，即位移场函数、广义力场函数和广义应变场函数，因此能直接计算得各类场变量值，而无需应用物理关系和微分关系，计算精度均较高.

双曲扁壳在齐次边界条件下，其三类变量广义势能泛函定义为

$$\Pi_{3s} = \int_\Omega \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{\chi}\, d\Omega + \int_\Omega \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{S}\, d\Omega + \int_\Omega \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{\varepsilon}\, d\Omega + \int_\Omega \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{J}\, d\, \Omega$$

$$+ \int_\Omega (U_p + U_b - \underset{\sim}{\Delta}^T \underset{\sim}{p}) d\Omega \tag{5.10.1}$$

式中

$$\underset{\sim}{M} = [M_x \quad M_y \quad M_{xy}]^T \tag{5.10.2}$$

$$\underset{\sim}{N} = [N_x \quad N_y \quad N_{xy}]^T \tag{5.10.3}$$

$$\underset{\sim}{\chi} = \underset{\sim}{\nabla}_1 \underset{\sim}{\Delta}, \quad \underset{\sim}{\varepsilon}_p = [\varepsilon_x \; \varepsilon_y \; \varepsilon_{xy}]^T \tag{5.10.4}$$

其中

$$\underset{\sim}{\nabla}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & -\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & -2\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{\Delta} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \tag{5.10.5}$$

式中

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_p = \underset{\sim}{\nabla}_2 \underset{\sim}{\Delta} \quad , \quad \underset{\sim}{\nabla}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & k_x \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & k_y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x} & 2k_{xy} \end{bmatrix} \tag{5.10.6}$$

$$U_p = \frac{1}{2}\underset{\sim}{J}^T \underset{\sim}{d}\, \underset{\sim}{J}, \qquad \underset{\sim}{J} = [-J_x - J_y - 2J_{xy}]^T \tag{5.10.7}$$

$$U_b = \frac{1}{2}\underset{\sim}{S}^T \underset{\sim}{D}_b \underset{\sim}{S}, \qquad \underset{\sim}{S} = [-S_x - S_y - 2S_{xy}]^T \tag{5.10.8}$$

$$\underset{\sim}{p} = [p_x \quad p_y \quad p_z]^T \tag{5.10.9}$$

$$\underset{\sim}{d} = \frac{Et}{(1-\mu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{5.10.10}$$

$$\underset{\sim}{D}_b = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{5.10.11}$$

现对于广义力$\underset{\sim}{M}$,$\underset{\sim}{N}$,广义应变$\underset{\sim}{S}$,$\underset{\sim}{J}$和位移$\underset{\sim}{\Delta}$,其三类变量的广义势能泛函数的驻值条件,即

$$\delta \Pi_{3s}(\underset{\sim}{M}, \underset{\sim}{N}, \underset{\sim}{S}, \underset{\sim}{J}, \underset{\sim}{\Delta}) = \underset{\sim}{0}$$

就有

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \delta \underset{\sim}{M}^T(\underset{\sim}{\chi} + \underset{\sim}{S})d\Omega + \int_\Omega \delta \underset{\sim}{N}^T(\underset{\sim}{\varepsilon} + \underset{\sim}{J})d\Omega = \underset{\sim}{0} \\ &\int_\Omega \delta \underset{\sim}{S}^T(\underset{\sim}{M} + \underset{\sim}{D}_b \underset{\sim}{S})d\Omega + \int_\Omega \delta \underset{\sim}{J}^T(\underset{\sim}{N} + \underset{\sim}{d}\, \underset{\sim}{J})d\Omega = \underset{\sim}{0} \\ &\int_\Omega \underset{\sim}{M}^T \delta \underset{\sim}{\chi}\, d\Omega + \int_\Omega \delta \underset{\sim}{\Delta}^T \underset{\sim}{p}\, d\Omega + \int_\Omega \underset{\sim}{N}^T \delta \underset{\sim}{\varepsilon}_p\, d\Omega = \underset{\sim}{0} \end{aligned} \tag{5.10.12}$$

对于简支边界的双曲扁壳问题,上述第三式的第一、三项进行分部积分得

$$\int_{\Omega}(\underset{\sim}{\overline{A}}^{T}\underset{\sim}{N}-\underset{\sim}{p})\delta\underset{\sim}{u}\,d\Omega+\int_{\Omega}(\underset{\sim}{\overline{B}}^{T}\underset{\sim}{M}-\underset{\sim}{N}^{T}\underset{\sim}{k}-\underset{\sim}{p_z})\delta w d\Omega=\underset{\sim}{0}$$

(5.10.13)

考虑到变分 $\delta\underset{\sim}{M}$;$\delta\underset{\sim}{N}$,$\delta\underset{\sim}{S}$,$\delta\underset{\sim}{J}$,$\delta\underset{\sim}{u}$,δw 在壳体内,均为不等于零的任意微小值,因此由式(5.10.12)前二式和式(5.10.13)得双曲扁壳的几何方程、物理方程和平衡方程如下:

$$\underset{\sim}{\chi}+\underset{\sim}{S}=\underset{\sim}{0},\ \underset{\sim}{\varepsilon_p}+\underset{\sim}{J}=\underset{\sim}{0} \qquad \text{在域内} \qquad (5.10.14)$$

$$\begin{matrix} v=\overline{v}=0 \\ w=\overline{w}=0 \end{matrix} \quad \text{或} \quad \begin{matrix} u=\overline{u}=0 \\ w=\overline{w}=0 \end{matrix} \qquad \text{在域的边界上}$$

(5.10.15)

$$\underset{\sim}{M}+\underset{\sim}{D_b}\underset{\sim}{S}=\underset{\sim}{0},\quad \underset{\sim}{N}+\underset{\sim}{d}\,\underset{\sim}{J}=\underset{\sim}{0} \qquad \text{在域内} \qquad (5.10.16)$$

$$\underset{\sim}{\overline{A}}^{T}\underset{\sim}{N}-\underset{\sim}{p}=\underset{\sim}{0},\underset{\sim}{\overline{B}}^{T}\underset{\sim}{M}-\underset{\sim}{N}^{T}\underset{\sim}{k}-\underset{\sim}{p_z}=\underset{\sim}{0} \qquad (5.10.17)$$

在边界上

$$\begin{aligned} &M_x=\overline{M}_x=0,N_x=\overline{N}_x=0 \\ \text{或}\ &M_y=\overline{M}_y=0,N_y=\overline{N}_y=0 \end{aligned} \qquad (5.10.18)$$

式中

$$\underset{\sim}{\overline{A}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\overline{B}}=[-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2}\ -2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}]^T \qquad (5.10.19)$$

$$\underset{\sim}{u}=[u\ v]^T,\quad \underset{\sim}{p}=[\underset{\sim}{p_x}\ \underset{\sim}{p_y}]^Y \qquad (5.10.20)$$

$$\underset{\sim}{k}=[-k_x\ -k_y\ -2k_{xy}]^T \qquad (5.10.21)$$

$\underset{\sim}{k}$-双曲扁壳的初曲率由方程(5.10.17)可知,薄膜力与弯曲力为通过双曲扁壳的曲率$\underset{\sim}{k}$相偶合,若令$\underset{\sim}{k}=\underset{\sim}{0}$,分别得薄膜方程与板弯曲方程.

5.11 双曲扁壳基于三类变量广义势能原理的多变量样条有限元法

上节,我们已论证了双曲扁壳的三类变量广义势能原理,所得到的平衡、几何及物理方面的三套方程,共有15个未知量.现设定三类场函数,它们是

$$\underset{\sim}{M}=[M_x\ M_y\ M_{xy}]^T=\underset{\sim}{\Psi}\ \underset{\sim}{\delta}_1 \tag{5.11.1}$$

$$\underset{\sim}{N}=[N_x\ N_y\ N_{xy}]^T=\underset{\sim}{\Psi}\ \underset{\sim}{\delta}_2 \tag{5.11.2}$$

$$\underset{\sim}{S}=[-S_x\ -S_y\ -2S_{xy}]^T=\underset{\sim}{\Psi}_1\underset{\sim}{\delta}_3 \tag{5.11.3}$$

$$\underset{\sim}{J}=[-J_x\ -J_y\ -2J_{xy}]^T=\underset{\sim}{\Psi}_1\underset{\sim}{\delta}_4 \tag{5.11.4}$$

$$\underset{\sim}{\Delta}=[u\ v\ w]^T=\underset{\sim}{\Psi}_2\underset{\sim}{\delta}_5 \tag{5.11.5}$$

式中

$$\underset{\sim}{\delta}_1=[\underset{\sim}{S}_1\ \underset{\sim}{S}_2\ \underset{\sim}{S}_3]^T,\quad \underset{\sim}{\delta}_2=[\underset{\sim}{S}_4\ \underset{\sim}{S}_5\ \underset{\sim}{S}_6]^T,\quad \underset{\sim}{\delta}_3=[\underset{\sim}{S}_7\ \underset{\sim}{S}_8\ \underset{\sim}{S}_9]^T$$
$$\underset{\sim}{\delta}_4=[\underset{\sim}{S}_{10}\ \underset{\sim}{S}_{11}\ \underset{\sim}{S}_{12}]^T,\quad \underset{\sim}{\delta}_5=[\underset{\sim}{S}_{13}\ \underset{\sim}{S}_{14}\ \underset{\sim}{S}_{15}]^T \tag{5.11.6}$$

$$\underset{\sim}{\Psi}=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) & & \underset{\sim}{0}\\ & \underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) & \\ \underset{\sim}{0} & & \underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y)\end{bmatrix} \tag{5.11.7}$$

$$\underset{\sim}{\Psi}_1=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) & & \underset{\sim}{0}\\ & \underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) & \\ \underset{\sim}{0} & & 2\underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y)\end{bmatrix} \tag{5.11.8}$$

$$\underset{\sim}{\Psi}_2 = \underset{\sim}{\Phi}(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}(y) \tag{5.11.9}$$

其中，$\underset{\sim}{S}_1, \underset{\sim}{S}_2, \cdots, \underset{\sim}{S}_{15}$均为常数，为待求未知量.

$$\underset{\sim}{S}_1 = [\underset{\sim}{S}'_{-1}\ \underset{\sim}{S}'_0\ \underset{\sim}{S}'_1 \cdots \underset{\sim}{S}'_i \cdots \underset{\sim}{S}'_N\ \underset{\sim}{S}'_{N+1}]^T \tag{5.11.10}$$

$$\underset{\sim}{S}'_i = [S'_{-1i}\ S'_{0i}\ S'_{1i} \cdots S'_{ii} \cdots S'_{Ni}\ S'_{N+1i}]^T \tag{5.11.11}$$

$$(i = -1, 0, 1, \cdots, M, M+1)$$

对于其他各常数量 $\underset{\sim}{S}_2, \underset{\sim}{S}_3, \cdots, \underset{\sim}{S}_{15}$与 $\underset{\sim}{S}_1$ 相似. $\underset{\sim}{\Psi}, \underset{\sim}{\Psi}_1, \underset{\sim}{\Psi}_2$ 均与三次B样条函数有关. $\otimes$为克罗尼克(Kronecker)记号，两个矩阵的 Kronecker 乘积，即有

$$\underset{\sim}{A} \otimes \underset{\sim}{B} = (a_{ij}B) \quad (i, j = -1, 0, 1, \cdots, N, N+1)$$

现将式(5.11.1)—(5.11.6)代入式(5.10.1)，并应用三类变量广义势能原理，即

$$\frac{\partial \Pi_{3s}}{\partial \underset{\sim}{\delta}_i} = \underset{\sim}{0} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

有

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{F} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{E} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{F} & \underset{\sim}{G} \\ \underset{\sim}{F}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{L} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{F}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{H} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{E}^T & \underset{\sim}{G}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\delta}_1 \\ \underset{\sim}{\delta}_2 \\ \underset{\sim}{\delta}_3 \\ \underset{\sim}{\delta}_4 \\ \underset{\sim}{\delta}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{Q} \end{Bmatrix} \tag{5.11.12}$$

式中

$$\underset{\sim}{E} = \iint_{\Omega} \underset{\sim}{\Psi}^T (\underset{\sim}{\nabla}_1 \underset{\sim}{\Psi}) dxdy = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & -\underset{\sim}{A}_x^{02} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & -\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{02} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & -2\underset{\sim}{A}_x^{01} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{01} \end{bmatrix} \tag{5.11.13}$$

$$
\underset{\sim}{F} = \iint_{\Omega} \underset{\sim}{\Psi}^T \underset{\sim}{\Psi}_1 dxdy
= \begin{bmatrix} -\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & & \underset{\sim}{0} \\ & -\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & \\ \underset{\sim}{0} & & -2\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} \end{bmatrix}
\tag{5.11.14}
$$

$$
\underset{\sim}{G} = \iint_{\Omega} \underset{\sim}{\Psi}^T (\underset{\sim}{\nabla}_2 \underset{\sim}{\Psi}) dxdy
= \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_x^{01} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & \underset{\sim}{0} & k_x \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{01} & k_x \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} \\ \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{01} & \underset{\sim}{A}_x^{01} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & k_{xy} \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} \end{bmatrix}
\tag{5.11.15}
$$

$$
\underset{\sim}{H} = \iint_{\Omega} \underset{\sim}{\Psi}_1^T d \underset{\sim}{\Psi}_1 dxdy = d \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{对称} & & 2(1-\mu) \end{bmatrix} \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00}
\tag{5.11.16}
$$

$$
\underset{\sim}{L} = \iint_{\Omega} \underset{\sim}{\Psi}_1^T \underset{\sim}{D}_b \underset{\sim}{\Psi}_1 dxdy = \underset{\sim}{D}_b \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{对称} & & 2(1-\mu) \end{bmatrix} \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00}
\tag{5.11.17}
$$

$$
\underset{\sim}{Q} = \iint_{\Omega} \underset{\sim}{\Psi}_2^T \underset{\sim}{p}\, dxdy = \iint_{\Omega} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\Phi}^T(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}^T(y) p_x \\ \underset{\sim}{\Phi}^T(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}^T(y) p_y \\ \underset{\sim}{\Phi}^T(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}^T(y) p_z \end{Bmatrix} dxdy
\tag{5.11.18}
$$

若令双曲扁壳的初曲率 $\underset{\sim}{k}=\underset{\sim}{0}$，则问题分解为一个平面应力问题和一个平板弯曲问题. 它们的方程组分别为对平面应力问题

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{F} & \underset{\sim}{G} \\ \underset{\sim}{F}^T & \underset{\sim}{H} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{G}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\delta}_2 \\ \underset{\sim}{\delta}_4 \\ \underset{\sim}{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{\overline{P}} \end{Bmatrix} \tag{5.11.19}$$

式中

$$\underset{\sim}{G} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_x^{01} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{A}_x^{01} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} \\ \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{01} & \underset{\sim}{A}_x^{01} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} \end{bmatrix} \tag{5.11.20}$$

$$\underset{\sim}{\overline{P}} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{P}_x \\ \underset{\sim}{P}_y \end{Bmatrix}, \quad \underset{\sim}{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \tag{5.11.21}$$

对于薄板弯曲问题

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{F} & \underset{\sim}{E} \\ \underset{\sim}{F}^T & \underset{\sim}{L} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{E}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\delta}_1 \\ \underset{\sim}{\delta}_3 \\ \underset{\sim}{S}_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{P}_z \end{Bmatrix} \tag{5.11.22}$$

应用式(5.11.12)求解双曲扁壳的三类变量共 15 个未知量：首先求出其常数值 $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_{15}$，当求出了这些值之后，利用式(5.11.1)－(5.11.5)可求得广义力 $\underset{\sim}{M}, \underset{\sim}{N}$，广义应变 $\underset{\sim}{S}, \underset{\sim}{J}$，位移分量 $\underset{\sim}{\Delta}$. 从而求得内力、应变与位移，共 15 个未知值. 由于系统方程组阶数较高，需要在大中型计算机上实施计算，通常采用的网格 4×4，6×6，8×8，可看出其收敛情况. 对应于上述网格的划分，其自由度分别为 735，1315 和 1815. 由于独立设置三类场函数，在计算过程中，既不应用物理关系，又不应用微分关系，直接求解其三类变量，因此对各类场变量均有较高的计算精度.

5.12 圆柱形扁壳的三类变量广义势能原理

圆柱形扁壳在齐次边界条件下的三类变量的广义势能泛函定义为

$$\Pi_{3c} = \int_{\Omega} \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{\chi}\, d\Omega + \int_{\Omega} \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{S}\, d\Omega + \int_{\Omega} \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{\varepsilon}\, d\Omega + \int_{\Omega} \underset{\sim}{N}^T \underset{\sim}{J}\, d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} (U_p + U_b - \underset{\sim}{\Delta}^T p) d\Omega \qquad (5.12.1)$$

式中

$$\underset{\sim}{M} = [M_x \quad M_\varphi \quad M_{x\varphi}]^T, \underset{\sim}{N} = [N_x \quad N_\varphi \quad N_{x\varphi}]^T \qquad (5.12.2)$$

$$\underset{\sim}{\chi} = \underset{\sim}{\nabla}_1 \underset{\sim}{\Delta}, \underset{\sim}{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_\varphi \quad \gamma_{x\varphi}]^T \qquad (5.12.3)$$

$$\underset{\sim}{\nabla}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & -k^2 \dfrac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ 0 & 0 & -2k \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\Delta} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \qquad (5.12.4)$$

$$U_p = \frac{1}{2} \underset{\sim}{J}^T \underset{\sim}{d} \underset{\sim}{J}, \ \underset{\sim}{J} = [-J_x - J_\varphi - 2J_{xy}]^T \qquad (5.12.5)$$

$$U_b = \frac{1}{2} \underset{\sim}{S}^T \underset{\sim}{D_b} \underset{\sim}{S}, \ \underset{\sim}{S} = [-S_x - S_\varphi - 2S_{x\varphi}]^T \qquad (5.12.6)$$

$$\underset{\sim}{p} = [p_x \ p_\varphi \ p_z]^T \qquad (5.12.7)$$

对于广义力 $\underset{\sim}{M}, \underset{\sim}{N}$，广义应变 $\underset{\sim}{S}, \underset{\sim}{J}$，位移 $\underset{\sim}{\Delta}$，其三类变量广义势能泛函的驻值条件，$\delta \Pi_{3c} = \underset{\sim}{0}$，就有

$$
\int_{\Omega}\delta \underset{\sim}{M}^{T}(\underset{\sim}{\chi}+\underset{\sim}{S})d\Omega+\int_{\Omega}\delta\, \underset{\sim}{N}^{T}(\underset{\sim}{\varepsilon}+\underset{\sim}{J})d\Omega=\underset{\sim}{0}
$$

$$
\int_{\Omega}\delta \underset{\sim}{S}^{T}(\underset{\sim}{M}+\underset{\sim}{D}_{b}\underset{\sim}{S})d\Omega+\int_{\Omega}\delta \underset{\sim}{J}^{T}(\underset{\sim}{N}+\underset{\sim}{d}\,\underset{\sim}{J})d\Omega=\underset{\sim}{0}
$$

$$
\int_{\Omega}\underset{\sim}{M}^{T}\delta \underset{\sim}{\chi}\, d\Omega-\int_{\Omega}\delta \underset{\sim}{\Delta}^{T}\underset{\sim}{p}\, d\Omega+\int_{\Omega}\delta \underset{\sim}{\varepsilon}^{T}\underset{\sim}{N}\, d\Omega=\underset{\sim}{0} \qquad (5.12.8)
$$

对于简支边界的圆柱扁壳，对上述第三式的第一项与第三项分别进行分部积分后，得

$$
\int_{\Omega}(\underset{\sim}{\overline{A}}^{T}\underset{\sim}{N}-\underset{\sim}{p})\delta \underset{\sim}{u}\, d\Omega+\int_{\Omega}(\underset{\sim}{\overline{B}}_{1}^{T}\underset{\sim}{M}-\underset{\sim}{N}_{\varphi}\underset{\sim}{k}-\underset{\sim}{p}_{z})\delta w d\Omega=\underset{\sim}{0} \qquad (5.12.9)
$$

考虑到广义力变分$\delta\underset{\sim}{M}$，$\delta\underset{\sim}{N}$，广义应变$\delta\underset{\sim}{S}$，$\delta\underset{\sim}{J}$和位移变分$\delta\underset{\sim}{u}$，δw在壳体内，均不等于零的任意微小值，因此由式(5.12.8)前二式和式(5.12.9)得圆柱形扁壳的平衡、物理与几何三套方程组：

$$
\underset{\sim}{\chi}+\underset{\sim}{S}=\underset{\sim}{0},\ \underset{\sim}{\varepsilon}+\underset{\sim}{J}=\underset{\sim}{0} \qquad \text{在域内} \qquad (5.12.10)
$$

$$
\left.\begin{aligned} v&=\overline{v}=0\\ w&=\overline{w}=0\end{aligned}\right. \quad \text{或} \quad \left.\begin{aligned} u&=\overline{u}=0\\ w&=\overline{w}=0\end{aligned}\right.
$$

$$
\text{在域的边界上} \qquad (5.12.11)
$$

$$
\underset{\sim}{M}+\underset{\sim}{D}_{b}\underset{\sim}{S}=\underset{\sim}{0},\quad \underset{\sim}{N}+\underset{\sim}{d}\,\underset{\sim}{J}=\underset{\sim}{0} \qquad (5.12.12)
$$

$$
\underset{\sim}{\overline{A}}^{T}\underset{\sim}{N}-\underset{\sim}{p}=\underset{\sim}{0},\quad \underset{\sim}{\overline{B}}_{1}^{T}\underset{\sim}{M}-\underset{\sim}{N}_{\varphi}\underset{\sim}{k}-p_{z}=0 \qquad (5.12.13)
$$

$$
M_{x}=0, N_{x}=0 \ \text{或}\ M_{\varphi}=0, N_{\varphi}=0
$$

式中

$$
\underset{\sim}{\overline{A}}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & k\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ k\dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}
$$

$$\underset{\sim}{\overline{B}}_1 = [-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - 2k\frac{\partial^2}{\partial\chi\partial\varphi}]^T \tag{5.12.14}$$

$$\underset{\sim}{p} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_\varphi \end{Bmatrix}, \underset{\sim}{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \tag{5.12.15}$$

5.13 圆柱形扁壳基于三类变量广义势能原理的多变量样条有限元法

假设三类变量场函数为

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{M} &= [M_x\ M_\varphi\ M_{x\varphi}]^T = \underset{\sim}{\overline{\Psi}}\ \underset{\sim}{\delta}_1 \\
\underset{\sim}{N} &= [N_x\ N_\varphi\ N_{x\varphi}]^T = \underset{\sim}{\overline{\Psi}}\ \underset{\sim}{\delta}_2 \\
\underset{\sim}{S} &= [-S_x\ -S_\varphi\ -2S_{x\varphi}]^T = \underset{\sim}{\overline{\Psi}}_1 \underset{\sim}{\delta}_3 \\
\underset{\sim}{J} &= [-J_x\ -J_\varphi\ -2J_{x\varphi}]^T = \underset{\sim}{\overline{\Psi}}_1 \underset{\sim}{\delta}_4 \\
\underset{\sim}{\Delta} &= [u\ v\ w]^T = \underset{\sim}{\overline{\Psi}}_2 \underset{\sim}{\delta}_5
\end{aligned} \tag{5.13.1}$$

式中

$$\begin{aligned}
&\underset{\sim}{\delta}_1 = [\underset{\sim}{S}_1\ \underset{\sim}{S}_2\ \underset{\sim}{S}_3]^T, \underset{\sim}{\delta}_2 = [\underset{\sim}{S}_4\ \underset{\sim}{S}_5\ \underset{\sim}{S}_6]^T, \underset{\sim}{\delta}_3 = [\underset{\sim}{S}_7\ \underset{\sim}{S}_8\ \underset{\sim}{S}_9]^T \\
&\underset{\sim}{\delta}_4 = [\underset{\sim}{S}_{10}\ \underset{\sim}{S}_{11}\ \underset{\sim}{S}_{12}]^T, \underset{\sim}{\delta}_5 = [\underset{\sim}{S}_{13}\ \underset{\sim}{S}_{14}\ \underset{\sim}{S}_{15}]^T
\end{aligned} \tag{5.13.2}$$

$$\underset{\sim}{\overline{\Psi}} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Phi}(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}(\varphi) & & \underset{\sim}{0} \\ & \underset{\sim}{\Phi}(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}(\varphi) & \\ \underset{\sim}{0} & & \underset{\sim}{\Phi}(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}(\varphi) \end{bmatrix} \tag{5.13.3}$$

$$\underset{\sim}{\overline{\Psi}}_1 = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Phi}(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}(\varphi) & & \underset{\sim}{0} \\ & \underset{\sim}{\Phi}(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}(\varphi) & \\ \underset{\sim}{0} & & 2\underset{\sim}{\Phi}(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}(\varphi) \end{bmatrix} \tag{5.13.4}$$

$$\underset{\sim}{\overline{\Psi}}_2 = \underset{\sim}{\Phi}(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}(\varphi) \tag{5.13.5}$$

其中，$\underset{\sim}{S}_1, \underset{\sim}{S}_2, \cdots, \underset{\sim}{S}_{15}$均为常数量，为待求未知量.

$$\underset{\sim}{S}_1 = [\underset{\sim}{S}'_{-1} \underset{\sim}{S}'_0 \ \underset{\sim}{S}'_1 \cdots \underset{\sim}{S}'_i \cdots \underset{\sim}{S}'_N \ \underset{\sim}{S}'_{N+1}]^T \tag{5.13.6}$$

$$\underset{\sim}{S}'_i = [\underset{\sim}{S}'_{-1i} \underset{\sim}{S}'_{0i} \ \underset{\sim}{S}'_{1i} \cdots \underset{\sim}{S}'_{ii} \cdots \underset{\sim}{S}'_{Ni} \ \underset{\sim}{S}'_{N+1i}]^T \tag{5.13.7}$$

$$(i = -1, 0, 1, \cdots, M, M+1)$$

对于其他各常数向量 $\underset{\sim}{S}_2, \underset{\sim}{S}_3, \cdots, \underset{\sim}{S}_{15}$ 与 $\underset{\sim}{S}_1$ 相似. 现将式(5.11.1)—(5.13.6)代入式(5.12.1)，并应用三类变量广义势能原理，即

$$\frac{\partial \Pi_{3s}}{\partial \underset{\sim}{\delta}_i} = \underset{\sim}{0} \qquad (i = 1,2,3,4,5)$$

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\overline{F}} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\overline{E}} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\overline{F}} & \underset{\sim}{\overline{G}} \\ \underset{\sim}{\overline{F}}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\overline{L}} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{F}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\overline{H}} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{\overline{E}}^T & \underset{\sim}{\overline{G}}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\delta}_1 \\ \underset{\sim}{\delta}_2 \\ \underset{\sim}{\delta}_3 \\ \underset{\sim}{\delta}_4 \\ \underset{\sim}{\delta}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{\overline{Q}} \end{Bmatrix} \tag{5.13.8}$$

式中

$$\underset{\sim}{\overline{E}} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & -\underset{\sim}{A}_x^{02} \otimes \underset{\sim}{A}_\varphi^{00} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & -k^2 \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_\varphi^{02} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & -2k \underset{\sim}{A}_x^{01} \otimes \underset{\sim}{A}_\varphi^{01} \end{bmatrix} \tag{5.13.9}$$

$$\underset{\sim}{\overline{F}} = \begin{bmatrix} -1 & & \underset{\sim}{0} \\ & -1 & \\ \underset{\sim}{0} & & -2 \end{bmatrix} A_x^{00} \otimes A_\varphi^{00} \tag{5.13.10}$$

$$\underset{\sim}{\overline{G}}=\begin{bmatrix} \underset{\sim}{A_x^{01}}\otimes\underset{\sim}{A_\varphi^{00}} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & k\underset{\sim}{A_x^{00}}\otimes\underset{\sim}{A_\varphi^{01}} & k\underset{\sim}{A_x^{00}}\otimes\underset{\sim}{A_\varphi^{00}} \\ k\underset{\sim}{A_x^{00}}\otimes\underset{\sim}{A_\varphi^{02}} & \underset{\sim}{A_x^{01}}\otimes\underset{\sim}{A_\varphi^{00}} & \underset{\sim}{0} \end{bmatrix} \tag{5.13.11}$$

$$\underset{\sim}{\overline{H}}=d\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{对称} & & 2(1-\mu) \end{bmatrix}\underset{\sim}{A_x^{00}}\otimes\underset{\sim}{A_\varphi^{00}} \tag{5.13.12}$$

$$\underset{\sim}{\overline{L}}=D_b\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{对称} & & 2(1-\mu) \end{bmatrix}\underset{\sim}{A_x^{00}}\otimes\underset{\sim}{A_\varphi^{00}} \tag{5.13.13}$$

$$\underset{\sim}{\overline{Q}}=\iint_{\Omega}\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\Phi^T}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi^T}(\varphi)p_x \\ \underset{\sim}{\Phi^T}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi^T}(\varphi)p_\varphi \\ \underset{\sim}{\Phi^T}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi^T}(\varphi)p_z \end{Bmatrix}Rdxd\varphi \tag{5.13.14}$$

5.14 圆柱形扁壳的振动与稳定

上节，介绍了多变量样条有限元法分析圆柱形扁壳的弯曲问题，在那里，推导了壳体的刚度矩阵. 如果再导出壳体的质量矩阵与几何刚度矩阵，则可以分析圆柱形扁壳的振动与稳定问题.

5.14.1 圆柱形扁壳的自由振动

圆柱形扁壳自由振动过程中的最大动能为 $\omega^2 T$，其中

$$T=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\rho t(u^2+v^2+w^2)d\Omega + \frac{1}{2}\int_{\Omega}\rho J(\varphi_x^2+\varphi_y^2)d\Omega \tag{5.14.1}$$

式中，ρt 是单位面积的质量，ρJ 是单位面积的转动惯量，ρ 为材料的密度，t 为壳体的厚度，J 为截面的惯性矩. 若将式(5.13.1)最后一式代入式(5.14.1)，并忽略转动惯量的影响，则得

$$\omega^2 T = \frac{\omega^2}{2}\left[\int_{\Omega} \rho t \underset{\sim}{\delta}_5^T \underset{\sim}{\overline{\Psi}}_2{}^T \otimes \underset{\sim}{\overline{\Psi}}_2 \underset{\sim}{\delta}_5 d\Omega\right]$$

$$= \frac{\omega^2}{2} \underset{\sim}{\delta}_5^T \underset{\sim}{M}_\lambda \underset{\sim}{\delta}_5 \qquad (5.14.2)$$

式中

$$\underset{\sim}{M}_\lambda = \rho t \begin{bmatrix} 1 & & \underset{\sim}{0} \\ & 1 & \\ \underset{\sim}{0} & & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_\varphi^{00} \qquad (5.14.3)$$

由式(5.13.8)和(5.14.2),有

$$\left[\begin{array}{cccc:c} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\overline{F}} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\overline{E}} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\overline{F}} & \underset{\sim}{\overline{G}} \\ \underset{\sim}{\overline{F}}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\overline{L}} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\overline{F}}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\overline{H}} & \underset{\sim}{0} \\ \hdashline \underset{\sim}{\overline{E}}^T & \underset{\sim}{\overline{G}}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \underset{\sim}{\delta}_1 \\ \underset{\sim}{\delta}_2 \\ \underset{\sim}{\delta}_3 \\ \underset{\sim}{\delta}_4 \\ \hdashline \underset{\sim}{\delta}_5 \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c:c} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \hdashline \underset{\sim}{0} & \omega^2 \underset{\sim}{M}_\lambda \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \underset{\sim}{\delta}_1 \\ \underset{\sim}{\delta}_2 \\ \underset{\sim}{\delta}_3 \\ \underset{\sim}{\delta}_4 \\ \hdashline \underset{\sim}{\delta}_5 \end{array}\right\}$$

$$(5.14.4)$$

由式(5.14.4)得圆柱形扁壳振动的特征值方程为

$$\left| - \underset{\sim}{K}_{12}^T \underset{\sim}{K}_{11}^{-1} \underset{\sim}{K}_{12} - \omega^2 \underset{\sim}{M}_\lambda \right| = 0 \qquad (5.14.5)$$

式中

$$\underset{\sim}{K}_{12} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\overline{E}} \\ \underset{\sim}{\overline{G}} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \end{bmatrix}, \underset{\sim}{K}_{11} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\overline{F}} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\overline{F}} \\ \underset{\sim}{\overline{F}}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\overline{L}} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\overline{F}}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{\overline{H}} \end{bmatrix} \qquad (5.14.6)$$

5.14.2 圆柱形扁壳的稳定

对于圆柱形扁壳的稳定问题,由纵向力 N_x 引起的外力功为

$$V = -\frac{1}{2}\iint_{\Omega} N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 R dx d\varphi \tag{5.14.7}$$

将式(5.13.1)的末式中的 w 代入上式，有

$$\begin{aligned} V &= -\frac{1}{2}\iint_{\Omega} N_x \underset{\sim}{\delta}_5^T (\underset{\sim}{\Phi}_x^{01} \otimes \underset{\sim}{\Phi}_\varphi^{00})^T (\underset{\sim}{\Phi}_x^{01} \otimes \underset{\sim}{\Phi}_\varphi^{00}) \underset{\sim}{\delta}_5 R dx dy \\ &= -\frac{1}{2} N_x \underset{\sim}{\delta}_5^T \underset{\sim}{A}_x^{11} \otimes \underset{\sim}{A}_\varphi^{00} \underset{\sim}{\delta}_5 \end{aligned} \tag{5.14.8}$$

由式(5.14.4)中的 $\omega^2 \underset{\sim}{M}_\lambda$ 改为 $\underset{\sim}{K}_G$，就得圆柱形扁壳的纵向稳定问题的特征方程

$$\left| -\underset{\sim}{\overline{K}}_{12}^T \underset{\sim}{K}_{11}^{-1} \underset{\sim}{\overline{K}}_{12} - \underset{\sim}{K}_G \right| = 0 \tag{5.14.9}$$

其中，$\underset{\sim}{K}_{11}$ 见式(5.14.6)第二式，而 $\overline{K}_{12}$ 详见下列式

$$\underset{\sim}{\overline{K}}_{12} = [\underset{\sim}{\overline{E}} \quad \underset{\sim}{0} \quad \underset{\sim}{0} \quad \underset{\sim}{0}]^T \tag{5.14.10}$$

$$\underset{\sim}{K}_G = N_x \underset{\sim}{A}_x^{11} \otimes \underset{\sim}{A}_\varphi^{00} \tag{5.14.11}$$

5.15 矩形底扁球壳的三类变量广义势能原理

对矩形底扁球壳这类结构在工程中常会遇到，如礼堂、剧院等. 本节先讨论其三类变量广义势能原理，然后再建立其多变量样条有限元模型.

对齐次边界条件下，对称扁球壳三类变量泛函定义为

$$\Pi_{3s} = \int_{\Omega} \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{\chi}\, d\Omega + \int_{\Omega} \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{k}\, d\Omega + \int_{\Omega} (U - qw) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{Et}{2R^2} w^2 d\Omega \tag{5.15.1}$$

式中 R 为扁球壳的曲率半径

$$\underset{\sim}{M} = [M_x \; M_y \; M_{xy}]^T \tag{5.15.2}$$

$$\underset{\sim}{\chi} = \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \; -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \; -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right]^T \tag{5.15.3}$$

$$U = \frac{1}{2} \underset{\sim}{k}^T \underset{\sim}{D}_b \underset{\sim}{k} \tag{5.15.4}$$

$$\underset{\sim}{D}_b = D_b \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \tag{5.15.5}$$

$$D_b = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \tag{5.15.6}$$

对于式(5.15.1)关于广义变量:应变 $\underset{\sim}{k}$、内力矩 $\underset{\sim}{M}$ 和位移 w 取泛函的驻值,即 $\delta\Pi_{3S}=\underset{\sim}{0}$,得

$$\int_\Omega (\delta \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{\chi} + \delta \underset{\sim}{M}^T \underset{\sim}{k}) d\Omega + \int_\Omega (\underset{\sim}{M}^T \delta \underset{\sim}{k} + \delta \underset{\sim}{k}^T \underset{\sim}{D}_b \underset{\sim}{k}) d\Omega$$

$$+ \int_\Omega (\underset{\sim}{M}^T \delta \underset{\sim}{\chi} - q\delta w) d\Omega + \int_\Omega \frac{Et}{R^2} w \delta w d\Omega = \underset{\sim}{0} \tag{5.15.7}$$

对上式第五项进行二次分部积分并利用简支边界条件后,得

$$\int_\Omega \underset{\sim}{M}^T \delta \underset{\sim}{\chi}\, d\Omega = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 Mx}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 My}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 Mxy}{\partial x \partial y}\right) \delta w d\Omega$$

现将上式代入原式(5.15.7),由于变分 $\delta w, \delta\underset{\sim}{M}, \delta\underset{\sim}{k}$ 在域内均不等于零的任意微小值,所以得几何、物理和平衡方程如下:

几何方程 $\qquad \underset{\sim}{\chi} + \underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{0} \qquad$ 在域内 $\qquad$ (5.15.8)

$w = \bar{w} = 0 \qquad$ 在域的边界上

物理方程

$$\underset{\sim}{M} = -\underset{\sim}{D}_b \underset{\sim}{k} \tag{5.15.9}$$

平衡方程

$$\frac{\partial^2 Mx}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 Mxy}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 My}{\partial y^2} = q - \frac{Et}{R^2} \quad \text{在域内} \tag{5.15.10}$$

$M_x = \bar{M}_x = 0, M_y = \bar{M}_y = 0 \qquad$ 在域的边界上

或将式(5.15.9)代入式(5.15.10),得以挠度表示的扁球壳的基本方程

$$D_b(w_{,xxxx} + 2w_{,xx,yy} + w_{,yyyy}) = q(x,y) - Et/R^2 \tag{5.15.11}$$

在上面各式中，w，$\underset{\sim}{M}$，$\underset{\sim}{k}$为扁壳的挠度、内力矩和应变，它们各是独立的待求场变量. 由三类变量的广义泛函(5.15.1)的驻值条件得扁球壳的基本方程(5.15.8)－(5.15.11)，它们具有等价性质.

5.16　多变量样条有限元法分析扁球壳

应用二元乘积型三次B样条插值函数来构造扁球壳的三类变量场函数.

$$\underset{\sim}{M}=\underset{\sim}{\Psi}_1\underset{\sim}{W}_1,\underset{\sim}{k}=\underset{\sim}{\Psi}_2\underset{\sim}{W}_2,W=\underset{\sim}{\Psi}_3\underset{\sim}{W}_3 \qquad (5.16.1)$$

式中

$$\underset{\sim}{W}_1=[\underset{\sim}{A}\ \underset{\sim}{B}\ \underset{\sim}{C}]^T,\underset{\sim}{W}_2=[\underset{\sim}{G}\ \underset{\sim}{I}\ \underset{\sim}{R}]^T$$

$\underset{\sim}{A}$，$\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{C}$，$\underset{\sim}{G}$，$\underset{\sim}{I}$，$\underset{\sim}{R}$都是行阵，而$\underset{\sim}{W}_1$，$\underset{\sim}{W}_2$，$\underset{\sim}{W}_3$是列阵，它们都是待求未知量，其中

$$\underset{\sim}{A}=[\underset{\sim}{A}_{-1}\underset{\sim}{A}_0\cdots\underset{\sim}{A}_N\underset{\sim}{A}_{N+1}] \qquad (5.16.2)$$

$$\underset{\sim}{A}_i=[a_{-1i}a_{1i}\cdots a_{ii}\cdots a_{Ni}a_{N+1i}]$$

$$(i=-1,0,1,\cdots,M,M+1) \qquad (5.16.3)$$

其他各常数矩阵与矩阵$\underset{\sim}{A}$类似. 矩阵$\underset{\sim}{\Psi}_1$，$\underset{\sim}{\Psi}_2$，$\underset{\sim}{\Psi}_3$与三次B样条函数有关，它们的表达式为

$$\underset{\sim}{\Psi}_1=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) & & \underset{\sim}{0}\\ & \underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) & \\ \underset{\sim}{0} & & \underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y)\end{bmatrix} \qquad (5.16.4)$$

$$\underset{\sim}{\Psi}_2=\begin{bmatrix}\underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) & & \underset{\sim}{0}\\ & \underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y) & \\ \underset{\sim}{0} & & 2\underset{\sim}{\Phi}(x)\otimes\underset{\sim}{\Phi}(y)\end{bmatrix} \qquad (5.16.5)$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Psi}}_3 = \underset{\sim}{\boldsymbol{\Phi}}(x) \otimes \underset{\sim}{\boldsymbol{\Phi}}(y) \tag{5.16.6}$$

$$\underset{\sim}{\chi} = \underset{\sim}{\bar{B}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\Psi}}_3 \underset{\sim}{W}_3$$

其中

$$\underset{\sim}{\bar{B}} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right]^T \tag{5.16.7}$$

现将式(5.16.1)到(5.16.7)代入式(5.15.1)，得扁球壳的三类变量的泛函为

$$\Pi_{3s} = \underset{\sim}{W}_1^T \underset{\sim}{F}\,\underset{\sim}{W}_3 + \underset{\sim}{W}_1^T \underset{\sim}{E}\,\underset{\sim}{W}_2 + \frac{1}{2}\underset{\sim}{W}_2^T \underset{\sim}{H}\,\underset{\sim}{W}_2$$

$$+ \frac{1}{2}\underset{\sim}{W}_3^T \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{W}_3 - \underset{\sim}{W}_3^T \underset{\sim}{\bar{P}} \tag{5.16.8}$$

由三类变量广义势能原理

$$\frac{\partial \Pi_{3s}}{\partial \underset{\sim}{W}_1} = \underset{\sim}{0}, \frac{\partial \Pi_{3s}}{\partial \underset{\sim}{W}_2} = \underset{\sim}{0}, \frac{\partial \Pi_{3s}}{\partial \underset{\sim}{W}_3} = \underset{\sim}{0}$$

得

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{E} & \underset{\sim}{F} \\ \underset{\sim}{E}^T & \underset{\sim}{H} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{F}^T & \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{W}_1 \\ \underset{\sim}{W}_2 \\ \underset{\sim}{W}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{\bar{P}} \end{Bmatrix} \tag{5.16.9}$$

式中

$$\underset{\sim}{E} = -\iint_{\Omega} \underset{\sim}{\boldsymbol{\Psi}}_1^T \underset{\sim}{\boldsymbol{\Psi}}_2 dxdy = \begin{bmatrix} -\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & & \underset{\sim}{0} \\ & -\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & \\ \underset{\sim}{0} & & -2\underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} \end{bmatrix} \tag{5.16.10}$$

$$\underset{\sim}{F} = \iint_{\Omega} \underset{\sim}{\boldsymbol{\Psi}}_1^T \underset{\sim}{\bar{B}}\,\underset{\sim}{\boldsymbol{\Psi}}_3 dxdy$$

$$= \left[-\underset{\sim}{A}_x^{02} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} - \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{02} - 2\underset{\sim}{A}_x^{01} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{01}\right] \tag{5.16.11}$$

$$
\underset{\sim}{H} = \iint_{\Omega} \underset{\sim}{\Psi}_2^T \underset{\sim}{D}_b \underset{\sim}{\Psi}_2 dxdy
$$

$$
= \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & \mu \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & \underset{\sim}{0} \\ \mu \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & 2(1-\mu) \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} \end{bmatrix}
$$

(5.16.12)

$$
\underset{\sim}{K} = Et/R^2 \underset{\sim}{A}_x^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_y^{00} \tag{5.16.13}
$$

$$
\underset{\sim}{A}_x^{ij} = \int_0^L \underset{\sim}{\Phi}^{iT}(x) \underset{\sim}{\Phi}^j(x) dx \qquad (x = x, y; i, j = 0, 1, 2)
$$

(5.16.14)

对于分布荷载，有

$$
\underset{\sim}{\overline{P}} = \iint_{\Omega} q(x, y) \underset{\sim}{\Phi}^T(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}^T(y) dxdy \tag{5.16.15}
$$

对于集中荷载，有

$$
\underset{\sim}{\overline{P}} = \int_0^L \int_0^L \delta(x - \zeta, y - \eta) \underset{\sim}{\Phi}^T(x) \otimes \underset{\sim}{\Phi}^T(y) dxdy
$$

$$
= \underset{\sim}{\Phi}^T(\xi) \otimes \underset{\sim}{\Phi}^T(\eta) \tag{5.16.16}
$$

ζ, η 为集中荷载作用点.

以上讨论了矩形底扁球壳的弯曲计算问题. 对于扁球壳的振动与稳定问题，只需将惯性荷载势能与中面力势能加入三类变量广义势能中，应用广义势能原理可推导出自由振动与稳定特征值方程. 根据广义势能原理，可推导出扁球壳的自振与稳定的特征向量方程为

$$
\begin{bmatrix} \underset{\sim}{K}_{11} & \underset{\sim}{K}_{12} \\ \underset{\sim}{K}_{12}^T & \underset{\sim}{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{W} \\ \underset{\sim}{W}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \lambda \underset{\sim}{M}_\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{W} \\ \underset{\sim}{W}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} \\ \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{K}_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{W} \\ \underset{\sim}{W}_3 \end{Bmatrix}
$$

(5.16.17)

对于扁球壳的振动特征值方程为

$$\left| -\underset{\sim}{K}_{12}^{T}\underset{\sim}{K}_{11}^{-1}\underset{\sim}{K}_{12} + \underset{\sim}{K} - \lambda \underset{\sim}{M}_{\lambda} \right| = 0 \tag{5.16.18}$$

式中

$$\underset{\sim}{K}_{12} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{F} \\ \underset{\sim}{0} \end{bmatrix}, \underset{\sim}{K}_{11} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{E} \\ \underset{\sim}{E}^{T} & \underset{\sim}{H} \end{bmatrix}, \underset{\sim}{w} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{W}_1 \\ \underset{\sim}{W}_2 \end{Bmatrix} \tag{5.16.19}$$

$$\underset{\sim}{M}_{\lambda} = \bar{m} \underset{\sim}{A}_{x}^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_{y}^{00} \tag{5.19.20}$$

对于扁球壳的稳定性问题，其特征值方程为

$$\left| -\underset{\sim}{K}_{12}^{T}\underset{\sim}{K}^{-1}\underset{\sim}{K}_{12} + \underset{\sim}{K} - \underset{\sim}{K}_{G} \right| = 0 \tag{5.16.21}$$

式中

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{K}_{G} = & \underset{\sim}{A}_{x}^{11} \otimes \underset{\sim}{A}_{y}^{00} N_x \\ & + \underset{\sim}{A}_{x}^{01} \otimes \underset{\sim}{A}_{y}^{01^T} N_{xy} \\ & + \underset{\sim}{A}_{x}^{01^T} \otimes \underset{\sim}{A}_{y}^{01} N_{yx} \\ & + \underset{\sim}{A}_{x}^{00} \otimes \underset{\sim}{A}_{y}^{11} N_y \end{aligned} \tag{5.16.22}$$

5.17 数值算例

根据上几节壳体结构二、三类变量的多变量样条有限元列式，编制了计算机程序，通过若干例子在 VAX－11/780 超级小型计算机上实施了计算，由数值结果显示，计算精度较高，并具有快速收敛的性质.

例 5-1 四边简支双曲扁壳，承受均布荷载作用，计算数据：$R_x = R_y = 75\text{m}, t = 8\text{cm}, L = 30\text{m}, q = 0.3N/\text{m}^2, E = 3\times 10^6 N/\text{m}^2, \mu = 0.3$. 计算扁壳的挠度与内力，其计算成果见表 5-5，5-6，5-7.

例 5-2 四边简支双曲扁壳，承受集中荷载. 计算数据：$R_x = R_y = 96\text{cm}, t = 0.1\text{cm}, L = 32\text{cm}, P = 100N, E = 10^7 N/\text{cm}^2, \mu = 0.3$，计算成果见表 5-8.

例 5-3 四边简支双曲扁壳与圆柱壳的自振频率，计算数据：$R_x = R_y = 32.4\text{m}, L = 24.0\text{m}, t = 0.06\text{m}, E = 2.9\times 10^6 N/\text{m}^2, \mu = 0.3$；对圆柱

壳，$R=32.4\mathrm{m}$，$\beta=43.4°$，$L=24.0\mathrm{m}$，$t=0.06\mathrm{m}$，$E=2.9\times10^6 N/\mathrm{m}^2$，$\mu=0.3$. 计算结果见表 5-9.

表 5-5 四边简支双曲扁壳承受均布荷载作用下，壳面中心的挠度，薄膜力及弯矩值

方法	网络	W_c(m)	N_c(N/m)	M_c(N-m/m)
多变	4×4	0.074911	11.98576	0.03878
量样	6×6	0.0071451	11.43216	0.01236
条元	8×8	0.0069688	11.15008	0.00082
法	10×10	0.0070378	11.26048	0.00086
[59]		0.0069930	11.25268	

表 5-6 四边简支双曲扁壳在均布荷载作用下、壳面中央处挠度、薄膜力及弯矩的收敛情况（打印结果）

网格	WD_b/qL^4	M_x/qL^2	M_y/qL^2
4×4	0.433617$E-05$	0.143429$E-03$	0.143130$E-03$
6×6	0.413589$E-05$	−0.457706$E-04$	−0.457706$E-04$
8×8	0.403385$E-05$	0.302560$E-05$	0.302567$E-05$
10×10	0.407380$E-05$	0.318848$E-05$	0.318818$E-05$
网格	N_x/qL	N_y/qL	
4×4	0.133176$E+01$	0.133176$E-01$	
6×6	−0.127024$E+01$	0.127024$E+01$	
8×8	0.123890$E+01$	0.123890$E+01$	
10×10	0.125117$E+01$	0.125117$E+01$	

表 5-7 四边简支双曲扁壳均布荷载作用时，在壳面中央处薄膜应变与弯曲应变值的收敛情况

网格	DS_x/qL^2	DS_y/qL^2	dJ_x/qL	dJ_y/qL
4×4	0.110330$E-03$	0.110331$E-03$	0.102443$E+01$	0.102442$E+01$
6×6	0.352082$E-04$	0.352082$E-04$	0.107375$E+01$	0.107375$E+01$
8×8	0.232739$E-05$	0.232744$E-05$	0.095302$E+01$	0.095302$E+01$
10×10	0.245268$E-05$	0.245245$E-05$	0.096244$E+01$	0.096241$E+01$

表 5-8 双曲扁壳中央处承受集中荷载($P=100N$)时,中央挠度与薄膜力

网格	W(cm)	N(N/cm)
8×8	0.034892	190.979
[有限元法]	0.036518	204.6706

表 5-9 四边简支双曲扁壳与圆柱壳的自振频率

方法	双曲扁壳 ω_{11}(Rad/s)	圆柱形扁壳 ω_{11}(Rad/s)
4×4	52.558367	26.313328
6×6	52.558395	26.313327
8×8	52.558389	26.313315
[93]	52.570514	26.30128

例 5-4 试计算四边简支圆柱形扁壳的自振频率,已知数据:$R=1.91$,$L=1$,$t=0.0191$,$E=1.0$,$\mu=0.3$. 计算结果见表 5-10.

表 5-10 四边简支圆柱形扁壳的自振频率

ω / 方法	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
	(Rad/s)				
多变量样条元法	0.28064	0.29892	0.50435	0.52234	0.57072
样条元法 [59]	0.28285	0.30295	0.50551	0.52489	0.57758

参 考 文 献

[1] Argyris, J. H. and Kelsey, S. , Energy Theorems and Structural Analysis, Butter Worth. London, 1960, 中译本, 邵成勋译, 科学出版社, 1978.

[2] Zienkiewicz, O. C. , The Finite Element Method, 3rd ed. , McGraw-Hill Ltd. , London. 1977.

[3] Gallagher, R. H. , Finite Element Analysis-Fundamentals, Prentice-Hall, Inc. , 1975.

[4] Cheung, Y. K. , Finite Strip Method in Structural Analysis , Pergamon Press, 1976.

[5] 钱令希, 工程结构优化设计, 水利电力出版社, 1989.

[6] 李桂青、霍达、邹祖军, 结构控制理论及其应用, 武汉工业大学出版社, 1991.

[7] 钟万勰等, 计算结构力学与最优控制, 大连理工大学出版社, 1993.

[8] 蔡四维, 结构力学的矩阵方法, 科学出版社, 1975.

[9] 华东水利学院, 弹性力学问题的有限单元法, 水利电力出版社, 1974.

[10] 龙驭球, 有限元法概念, 人民教育出版社, 1979.

[11] 卞学镄, 有限元法论文选, 国防工业出版社, 1980.

[12] 诸德超等, 结构分析中的有限元素法, 国防工业出版社, 1981.

[13] 谢贻权、何福保, 弹性和塑性力学中的有限元法, 机械工业出版社, 1981.

[14] 朱伯芳, 有限单元法与应用, 水利电力出版社, 1979.

[15] 张允真, 曹富新, 弹性力学及其有限元法, 中国铁道出版社, 1983.

[16] 赵超燮编, 结构矩阵分析原理, 人民教育出版社, 1983.

[17] 布瑞比亚, C. A. 等著, 龙述尧等译, 边界元法的理论与工程应用, 国防工业出版社. 1988.

[18] 劳尔, S. S. 著, 傅子智译, 工程中的有限元法, 科学出版社, 1991.

[19] 王勖成、邵敏, 有限单元法基本原理与数值方法, 清华大学出版社, 1988.

[20] 沈鹏程, 结构力学中的有限元法, 水利电力出版社, 1989.

[21] 钱伟长, 变分法与有限元(上册), 科学出版社, 1980.

[22] 胡海昌, 弹性力学的变分原理及其应用, 科学出版社, 1981.

[23] Washizu, K. , Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 2nd ed. , Pergamon Press. 1975.

[24] Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N. , Theory of Elasticity, 3rd. ed. , McGraw-Hill. 1970.

[25] Timoshenko, S. P. and Krieger, S. W. , Theory of Plates and Shells, 2nd ed. , McGraw-Hill , 1959.

[26] 张福范译,弹性稳定性理论,科学出版社,1958.
[27] Prenter ,P. M. ,Splines and Variational Method, John Wiley and Sons, 1975.
[28] 吴兹潜、张佑启、范寿昌,结构分析的样条有限条法,广东科技出版社,1985.
[29] 秦荣,结构力学的样条函数法,广西人民出版社,1985.
[30] 沈鹏程,结构分析中的样条有限元法,水利电力出版社,1992.
[31] 刘效尧,样条函数与结构力学,人民交通出版社,1990.
[32] Turner, M. J. ,Clough, R. W. ,Martin, H. C. and Topp, L. J. , Stiffness and deflection analysis of complex structures,J. Aeros, Vol. 23,No. 9,805—824,1956.
[33] Clough, R. W, The finite element method in plane stress analysis,Am. Soc. Civ. Eng. , Vol. 87,345—378,1960.
[34] Melosh, R. J. ,Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method, AIAA,J. Vol. 1,No. 7,1631—1637,1963.
[35] Pian T. H. H. , Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions, AIAA J. ,Vol. 2, No. 9, 1333—1336,1964.
[36] Herrmann, L. R. ,Finite element bending analysis for plates, J. Eng. Mech. Div. , ASCE. ,EM5,13—26,1967.
[37] 冯康,基于变分原理的差分格式,应用数学与计算数学,2 卷,4 期,238—262,1965.
[38] 钱令希,谈谈计算结构力学的现状和今后的工作,计算结构力学及其应用,3 卷,3 期,1—6,1986.
[39] 唐立民、陈万吉、刘迎曦,有限元法分析中的拟协调元方法,大连工学院学报,19 卷,2 期,19—35,1980.
[40] Chen Wanji(陈万吉) and Cheung, Y. K. ,A new approach for the hybrid element method, Int. J. Numer. Meth. Engng. ,Vol. 24,1697—1709,1987.
[41] 黄茂光、雷小燕,边界元应力函数法解旋转体的扭转问题,工程力学,1 卷,1 期,12—21,1984.
[42] Blevins, R. D. , Formulas for natrual frequency and mode shape, Van Nostrand Reinhold Co. ,1979.
[43] Divid, S. W. , On the construction of conforming rectangular plate element, Int. J. Numer. Meth. Engng. ,Vol. 10,925—933,1976.
[44] Warburton, G. B. ,The vibration of rectangular plates, Proc. Inst Mech. Engnrs. , Vol. 68,No. 12,371—384,1954.
[45] Mirza, F. A. and olson, M. D. ,The mixed finite element method in plane elasticity,Int. J. Numer. Meth. Engng. , Vol. 15,273—289,1980.
[46] 沈鹏程、苏甘龙、王建国,双曲扁壳有限条分析,土木工程学报,16 卷,4 期,41—51,1983.
[47] 沈鹏程,虚功的对偶性原理及其在混合杂交有限元法中的应用,上海力学,2 期,42—

47,1985.

[48] 沈鹏程,Reissner 混合参数有限元法在杆系结构中的应用,合肥工业大学学报,3 期,77—89,1982.

[49] Antes, H., Bicubic fundamental splines in plate bending, Int J. Num. Meth. Engng., Vol. 8,503—511,1974.

[50] Mizusawa, T., et al, Vibration of skew plates using B spline functions, J. Sound and Vibration, Vol. 62, No. 2, 301—308,1979.

[51] 石钟慈,样条有限元,计算数学,1 期,50—72,1979.

[52] 何广乾、周润珍、林春哲,样条函数法在解板壳问题中的应用,建筑结构学报,2 卷,2 期,1—9,1981.

[53] 袁驷,样条矩形单元,计算结构力学及其应用,1 卷,2 期,41—47,1984.

[54] 王建国、沈鹏程,样条函数法解圆柱壳问题,土木工程学报,17 卷,2 期,75—85,1984.

[55] Shen Pengcheng and Wang Jianguo, Solution of governing differential equations of vibrating cylindrical shells by using B spline functions, Int. J. numerical methods for partial differential equations, No. 2,173—185, John Wiley and Sons.

[56] Shen Pengcheng and Wang Jianguo, Vibration analysis of flat shells by using B spline functions, Int. J. Computers & Structures, Vol. 25, No. 1, 1—10, 1987, Pergamon Journals Ltd.

[57] Shen Pengcheng and Wang Jianguo, Static analysis of cylindrical shells by using B spline functions, Int. J. Computers & Structures, Vol. 25, No. 6, 809—816, 1987, U. K..

[58] Shen Pengcheng, Huang Dade and Wang Zongmu, Static, vibration and stability analysis of stiffened plates using B spline functions. Int. J. Computers & Structures, Vol. 27, No. 1, 73—78, 1987.

[59] Shen Pengcheng and Wang Jianguo, A semianalytical method for static analysis of shallow shells, Int. J. Computers & Structures, Vol. 31, No. 5, 825—831, 1989.

[60] Shen Pengcheng and Huang Dade, Vibration analysis of stiffened plates and shells using spline Gauss collocation method, Procedings of Int. Conference on Computational Engineering Science, Chapter 39.5, Atlanta, Georgia, USA, April, 10—14, 1988.

[61] Shen Pengcheng and Huang Dade, Static analysis of stiffened plates and shells using spline Gauss collocation method, Procedings of 2nd Int. Conference on Education, Practice and Promotion of Computational Method in Engineering Using Small Computers, Vol. 2, 414—418, 1987.

[62] P. C. Shen and Huang Dade, Dynamics analysis of stiffened plates and shells using spline Gauss collocation method, Int. J. Computers & Structures, Vol. 36, No. 4, 625—629, 1990, U. K..

[63] Shen Pengcheng and Huang Dade, Analysis of stiffened structures on foundation using

spline Gauss collocation method, Second World Congress on Computational Mechanics, Stuttgart FRG, Aug, 27－31, 1990, Proc. Vol. 2, 451－454.

[64] P. C. Shen and H. B. Kan, The multivariable spline element analysis for plate bending problems, Computers & Structures, Vol. 40, No. 6, 1343－1349, 1992.

[65] P. C. Shen, Analysis of static vibration and stability for plates and beams on foundation by using spline finite element method, Int. Conf on Computational Engieerisng Science, August, 12－16, 1991.

[66] P. C. Shen, Stability analysis for plates using multivariable spline element method, Computers & Structures, Vol. 45, No. 5/6, 1073－1077, 1992.

[67] P. C. Shen, Vibration analysis for plates using multivariable spline element method, Int. J. Solids & Structures, Vol. 29, No. 24, 3289－3295, 1992.

[68] 沈鹏程、黄大德，样条高斯配点法分析加劲板壳问题，工程力学，3 期，38－57，1990.

[69] 沈鹏程、何沛祥，多变量样条元法分析薄板的弯曲、振动与屈曲，合肥工业大学学报，14 卷，4 期，41－54，1991.

[70] 沈鹏程、王建国，样条函数法分析扁壳振动及其在微型机上的实施，《振动与冲击》，2 期，64－69，1987.

[71] 沈鹏程、黄大德，样条高斯配点法分析加劲板壳的振动与屈曲问题，《计算结构力学及其应用》，7 卷，1 期，25－36，1990.

[72] 沈鹏程、何沛祥，基于三类变量广义变分原理的多变量样条有限元法，第三届全国计算力学学术会议论文集，232－235，科学出版社，1992.

[73] Shen Pengcheng and He Peixiang, Bending analysis of plates and spherical shells by multivariable spline element method based on generalized variational principle, Int. J. Computers & Structures, Vol. 55, No. 1, 151－157, 1995.

[74] 沈鹏程、余景平、查毅军，样条混合元法解板壳问题，计算物理，12 卷，4 期，515－522，1995.

[75] 沈鹏程、何沛祥，多变量样条有限元法，固体力学学报，15 卷，3 期，234－243，1994.

[76] 沈鹏程、何沛祥、沈小璞，基于胡一鹫津原理的多变量样条有限元法分析扁壳问题，土木工程学报，29 卷，4 期，10－20，1996.

[77] 沈鹏程、陈荣毅，状态空间法计算拱坝的多变量静、动力响应，高拱坝学术讨论会论文集，296－305，国家自然科学基金委员会工程与材料科学部，1996.

[78] 沈鹏程、何沛祥、沈小璞，多变量样条元法分析中厚板的弯曲，工程力学增刊，219－224，1993.

[79] 沈鹏程，多变量样条有限元法的进展，工程力学增刊，163－169，1995.

[80] 常春馨，现代控制理论基础，机械工业出版社，1988.

[81] 范家让，强厚度迭层板壳的精确理论，科学出版社，1996.

[82] 吴长春、卞学镄，非协调元数值分析和杂交元方法，科学出版社，1997.

[83] Fan Jiarang (范家让), Ye Jianqiao, An exact solution for statics and dynamics of laminated thick plates with orthotropic layers, Int. J. Solids & Structures, Vol. 26, (5/6), 655－662, 1990.

[84] 唐立民,弹性力学的混合方程和 Hamilton 正则方程,计算结构力学及其应用,4 期,343－350,1991.

[85] 钟万勰,条形域平面弹性问题和哈密顿体系,大连理工大学学报,4 期,373－384,1991.

[86] 沈鹏程,弹性力学的状态空间法,结构力学及弹性力学教学与教材研究,11 期,58－61,1995,2.

[87] 沈鹏程、余景平,基于状态空间理论的多变量样条有限元法,合肥工业大学学报,18 卷,1 期,14－21,1995,3.

[88] 余景平、沈鹏程、路观平、沈小璞,状态空间法分析结构的动态响应,安徽建筑工业学院学报,3 卷,2 期,1－5,1995.

[89] 沈小璞、陈荣毅,状态空间法分析厚薄壁圆筒的统一问题,工程力学增刊,1 卷,130－134,1996.

[90] 沈小璞、陈荣毅、沈鹏程,状态空间法解厚薄压力管的多变量统一问题,安徽建筑,4 卷,3－4 期,126－129,1996.

[91] 沈小璞、陈荣毅、沈鹏程,基于状态空间理论的结构动力响应解法,工程力学增刊,2 卷,492－496.

[92] Clough R. W., Dynamics of Structures, McGraw-Hill, Book Co., New York, 1975.(中译本,王光远译,科学出版社,1981)

[93] 曹志远,板壳振动理论,中国铁道出版社,1989.

[94] 钟万勰,暂态历程的精细计算方法,计算结构力学及其应用,12 卷,1 期,1－6,1995.

[95] 唐立民等,混合状态 Hamiltonian 元的半解析解和叠层板的计算,计算结构力学及其应用,9 卷,4 期,347－360,1992.

[96] 陈滨,Hamilton 原理四种表达形式的异同,力学与实践,1 期,64－68,1994.

[97] 肖卓,陈荣毅,沈小璞,状态空间迭代法计算结构动力响应,合肥工业大学学报,2 期,45－49,1996.

[98] 秦孟兆,辛几何及计算哈密顿力学,力学与实践,6 期,1－20,1990.